高等数学A

第1章 函数与极限

1.4 极限的运算法则

1.4.1 极限的四则运算法则　1.4.2 复合函数的极限运算法则

中南大学开放式精品示范课堂高等数学建设组

1.4 极限的运算法则

极限的运算法则

- 1.4.1 极限的四则运算法则
  - 函数极限的四则运算
  - 数列极限的四则运算
- 1.4.2 复合函数的极限运算法则
- 函数极限计算举例
  - 多项式函数(代入法) 习例1
  - 有理分式
    - 代入法
    - $\frac{0}{0}$ 习例2-5
    - $\frac{\infty}{\infty}$ 其它习例6-11
  - 极限计算反问题

一、极限的四则运算法则

1. 函数极限的四则运算法则

以下定理中"lim"表示$x \to x_0, x \to x_0^+, x \to x_0^-, x \to \infty, x \to +\infty, x \to -\infty$都成立.

定理1 若$\lim f(x) = A, \lim g(x) = B$,则

$$(1)\lim[f(x) \pm g(x)] = \lim f(x) \pm \lim g(x) = A \pm B$$

$$(2)\lim[f(x)g(x)] = \lim f(x) \cdot \lim g(x) = A \cdot B$$

$$(3)\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)} = \frac{A}{B} \quad (B \neq 0)$$

注意:

(1)代数和与乘积运算可推广到有限个函数的情形.

(2)$\lim cf(x) = c\lim f(x)$, $\lim[f(x)]^n = [\lim f(x)]^n$.

(3)数列极限有类似的四则运算.

不失一般性，考虑极限过程 $x \to x_0$，进行证明．

证明：(1) $\lim\limits_{x \to x_0}[f(x) \pm g(x)] = A \pm B$

$\because \left|[f(x) \pm g(x)] - (A \pm B)\right| = \left|[f(x) - A] \pm [g(x) - B]\right|$

$\le \left|f(x) - A\right| + \left|g(x) - B\right|$

$\forall \varepsilon > 0$, $\because \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = B$

$\exists \delta_1 > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta_1$ 时, 有 $|f(x) - A| < \dfrac{\varepsilon}{2}$,

$\exists \delta_2 > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta_2$ 时, 有 $|g(x) - B| < \dfrac{\varepsilon}{2}$,

取 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时,

$$\left|[f(x) \pm g(x)] - (A \pm B)\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

$\therefore \lim\limits_{x \to x_0}[f(x) \pm g(x)] = A \pm B.$

证明: (2) $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)g(x)]=A\cdot B$

$\because |f(x)g(x)-AB|=|f(x)g(x)-Bf(x)+Bf(x)-AB|$

$\leq |f(x)||g(x)-B|+|B||f(x)-A|$

$\forall \varepsilon>0,\quad \because \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A,\ \lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B$

$\exists \delta_1>0$, 当 $0<|x-x_0|<\delta_1$ 时, 有 $|f(x)-A|<\dfrac{\varepsilon}{2|B|}$,

又对于 $\dfrac{|A|}{2}$, $\exists \delta_2>0$, 有 $|f(x)-A|<\dfrac{|A|}{2}$, 即 $|f(x)|<\dfrac{3}{2}|A|$,

$\exists \delta_3>0$, 当 $0<|x-x_0|<\delta_3$ 时, 有 $|g(x)-B|<\dfrac{\varepsilon}{3|A|}$,

取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2,\delta_3\}$, 当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,

$$|f(x)g(x)-AB|<\frac{3|A|}{2}\cdot\frac{\varepsilon}{3|A|}+|B|\cdot\frac{\varepsilon}{2|B|}=\varepsilon.$$

$\therefore \lim\limits_{x\to x_0}[f(x)g(x)]=A\cdot B$

证明: (3) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to x_0}f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}g(x)}=\dfrac{A}{B}\quad(B\neq 0)$

$$\because\left|\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{A}{B}\right|=\left|\frac{Bf(x)-Ag(x)}{Bg(x)}\right|=\frac{|B[f(x)-A]-A[g(x)-B]|}{|B||g(x)|}$$

$$\leq\frac{|f(x)-A|}{|g(x)|}+\frac{|A||g(x)-B|}{|B||g(x)|}$$

因 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=B\neq 0$，对于正数 $\dfrac{|B|}{2}$，$\exists\delta_1>0$ 使得当 $0<|x-x_0|<\delta_1$ 时，

有 $|g(x)-B|<\dfrac{|B|}{2}$，所以 $|g(x)|=|g(x)-B+B|\geq|B|-|g(x)-B|>\dfrac{|B|}{2}$． 即得

$$\left|\frac{1}{g(x)}\right|<\frac{2}{|B|}$$

$\forall\varepsilon>0$ 分两种情况:

若 $A=0$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A=0$， $\exists\delta_2>0$ 使得当 $0<|x-x_0|<\delta_2$ 时，有

$$\left|f(x)-A\right|=\left|f(x)-0\right|=\left|f(x)\right|<\frac{|B|}{2}\varepsilon$$

取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$，则当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{A}{B}\right|=\left|\frac{f(x)}{g(x)}-0\right|=\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right|<\frac{2}{|B|}\cdot\frac{|B|}{2}\varepsilon=\varepsilon$$

由定义知 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=0=\frac{A}{B}$

若 $A\neq 0$，因 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$， $\exists\delta_3>0$ 使得当 $0<|x-x_0|<\delta_3$ 时，有

$$\left|f(x)-A\right|<\frac{|B|}{4}\varepsilon$$

因 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=B$， $\exists\delta_4>0$ 使得当 $0<|x-x_0|<\delta_4$ 时，有

$$\left|g(x)-B\right|<\frac{|B|^2}{4|A|}\varepsilon$$

取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_3,\delta_4\}$， 则当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{A}{B}\right| \le \frac{|B||f(x)-A|+|A||g(x)-B|}{|Bg(x)|} < \frac{1}{|B|}\cdot\frac{2}{|B|}\left(|B|\cdot\frac{|B|}{4}\varepsilon+|A|\cdot\frac{|B|^2}{4|A|}\varepsilon\right)=\varepsilon$$

所以 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{A}{B}$ 证毕。

2. 数列极限的四则运算法则

定理2 设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$，则

$$\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n = a + b$$

$$\lim_{n\to\infty}(x_n - y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n - \lim_{n\to\infty} y_n = a - b$$

$$\lim_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} y_n = a \cdot b$$

当 $y_n \neq 0 (n = 1, 2, \cdots)$，且 $b \neq 0$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{a}{b}$

二、复合函数的极限运算法则

复合函数的极限运算法则（证明参见教材）

定理 3 (复合函数的极限运算法则)

设 (1) $u = g(x),\ \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = u_0$,

(2) $y = f(u),\ \lim\limits_{u \to u_0} f(u) = A$,

(3) 当 $x \neq x_0$ 时, $u \neq u_0$,

则 $\lim\limits_{x \to x_0} f[g(x)] = A = \lim\limits_{u \to u_0} f(u)$.

注意: 把 $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = u_0$ 换成 $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \infty$ 或 $\lim\limits_{x \to \infty} g(x) = \infty$，

而把 $\lim\limits_{u \to u_0} f(u) = A$ 换成 $\lim\limits_{u \to \infty} f(u) = A$,可得类似的定理 .

应用过程为: $\lim\limits_{x \to x_0} f[g(x)] \xlongequal{令 u = g(x)} \lim\limits_{u \to u_0} f(u) = A$.

三、函数极限计算举例

1. 多项式函数极限的计算

常用结论

(1) $\lim C = C$, (2) $\lim\limits_{x\to x_0} x = x_0$,

(3) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x} = 0$, (4) $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0 \ (|q| < 1)$.

例1. 设 $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n\text{-}1}x + a_n$,求 $\lim\limits_{x\to x_0} P(x)$.

解: $\lim\limits_{x\to x_0} P(x) = \lim\limits_{x\to x_0} a_0x^n + \lim\limits_{x\to x_0} a_1x^{n-1} + \cdots + \lim\limits_{x\to x_0} a_n$

$$= a_0\left(\lim_{x\to x_0} x\right)^n + a_1\left(\lim_{x\to x_0} x\right)^{n-1} + \cdots + a_n$$

$$= a_0x_0^n + a_1x_0^{n-1} + \cdots + a_n$$

$$= P(x_0)$$

例如计算: $\lim\limits_{x\to 1}(2x-1)$ 、$\lim\limits_{x\to 2}(x^2-3x+5)$ 等。

2. 有理分式函数极限的计算

例2. 设$P(x), Q(x)$为多项式函数,求 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{P(x)}{Q(x)}$.

例3.计算$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+x^2+\cdots+x^n-n}{x-1}$.

例4.计算$\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{3}{x^3-1}\right)$.

例5. 计算 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+x-1}{2x^2-1}$.

例2. 设$P(x),Q(x)$为多项式函数,求 $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{P(x)}{Q(x)}$.

解: $\because \lim\limits_{x \to x_0} P(x) = P(x_0)$, $\lim\limits_{x \to x_0} Q(x) = Q(x_0)$,

若$Q(x_0) \neq 0$, 则 $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{P(x)}{Q(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to x_0} P(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} Q(x)} = \dfrac{P(x_0)}{Q(x_0)}$;

若$P(x_0) = Q(x_0) = 0$, 则把$P(x),Q(x)$分解因式约去公因式后再处理.

若$Q(x_0) = 0, P(x_0) \neq 0$时, 则 $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{P(x)}{Q(x)} = \infty$.

Back

例3. 计算 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+x^2+\cdots+x^n-n}{x-1}$. $\left(\dfrac{0}{0}\text{型}\right)$

解: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+x^2+\cdots+x^n-n}{x-1}$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)+(x^2-1)+\cdots+(x^n-1)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}[1+(x+1)+(x^2+x+1)+\cdots+(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+1)]$$

$$=1+2+3+\cdots+(n-1)+n$$

$$=\frac{n(n+1)}{2}.$$

Back

例4. 计算 $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{3}{x^3-1}\right)$.

解: $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{3}{x^3-1}\right)$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x+1-3}{x^3-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x^2+x+1)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x+2}{x^2+x+1}=1.$$

Back

例5. 计算 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+x-1}{2x^2-1}$. $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\text{型}\right)$

解: $\because \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^n}=0$, $\therefore \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+x-1}{2x^2-1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}}{2+\dfrac{1}{x^2}}=\dfrac{1}{2}$

同样地,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2x}{x^3-x^2+2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{x^2}}{1-\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{x^3}}=\frac{0}{1}=0,$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-x^2+2}{x^2+2x}=\infty.$$

Back

一般地，当$a_0 \neq 0, b_0 \neq 0, m$和$n$为非负整数时有

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^m + a_1x^{m-1} + \cdots + a_m}{b_0x^n + b_1x^{n-1} + \cdots + b_n} = \begin{cases} \dfrac{a_0}{b_0}, & \text{当} n = m, \\ 0, & \text{当} n > m, \\ \infty, & \text{当} n < m. \end{cases}$$

当 x 以自然数变化时也有同样的结论!

方法：(1) 以分子分母中自变量的最高次幂除分子、分母，然后再求极限.

(2) 或者直接用结论.

3. 其它函数极限计算习例6-11

例6.计算 $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{\dfrac{x-2}{x^2-4}}$.

例7.计算 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{1+x}-2}{x-3}$.

例8. 计算 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}$.

例9. 计算 $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right)$.

例10. 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^x-n^{-x}}{n^x+n^{-x}}$.

例11. 已知 $F_n=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right]$,

证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{F_n}{F_{n+1}}=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

例6.计算 $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{\dfrac{x-2}{x^2-4}}$.

解: 令 $u=\dfrac{x-2}{x^2-4}$,

$$\because \lim_{x\to 2}\frac{x-2}{x^2-4}=\lim_{x\to 2}\frac{1}{x+2}=\frac{1}{4},$$

$$\therefore \text{原式}=\lim_{u\to\frac{1}{4}}\sqrt{u}=\frac{1}{2}.$$

或者 $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{\dfrac{x-2}{x^2-4}}=\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{\dfrac{1}{x+2}}=\sqrt{\dfrac{1}{4}}=\dfrac{1}{2}.$

例7.计算 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{1+x}-2}{x-3}$.

解: $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{1+x}-2}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(1+x-4)}{(x-3)(\sqrt{1+x}+2)}$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{1}{\sqrt{1+x}+2}=\frac{1}{4}.$$

Back

例8. 计算 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}$.

解: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}\overset{x=t^{12}}{=\!=\!=\!=\!=}\lim\limits_{t\to 1}\dfrac{t^4-1}{t^3-1}$

$$=\lim_{t\to 1}\frac{(t+1)(t^2+1)}{t^2+t+1}$$

$$=\frac{4}{3}.$$

Back

例9. 计算 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right)$.

解: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right)$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{x}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}}{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x\sqrt{x}}}}+1}=\frac{1}{2}.$$

Back

例10. 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^x-n^{-x}}{n^x+n^{-x}}$.

解: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^x-n^{-x}}{n^x+n^{-x}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^{2x}-1}{n^{2x}+1}$

$$=\begin{cases}\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-\dfrac{1}{n^{2x}}}{1+\dfrac{1}{n^{2x}}}, & x>0\\ 0, & x=0\\ \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^{2x}-1}{n^{2x}+1}, & x<0\end{cases}=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<0\end{cases}$$

Back

例11. 已知 $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right]$,

证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{F_n}{F_{n+1}} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

证明: $\because \lim\limits_{n\to\infty}\frac{F_n}{F_{n+1}} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^{n+1}}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^{n+1}\cdot\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)},$$

而 $\left|\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right|<1,$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{F_n}{F_{n+1}}=\frac{2}{1+\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Back

函数极限的反问题

例12. 若 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+ax+b}{x^2-x-2}=2$, 求 a,b.

例13 设 $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ 存在, $f(x)=x^2+2x\lim\limits_{x\to 1} f(x)$, 求 $f(x)$.

例14 试确定常数 *a*, *b*,*c* 使

$$\lim_{x\to 1}\frac{a(x-1)^2+b(x-1)+c-\sqrt{x^2+3}}{(x-1)^2}=0.$$

例12. 若 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+ax+b}{x^2-x-2}=2$, 求 a,b.

解　依题意, $4+2a+b=0$, 即 $b=-4-2a$.

$$\text{则}\lim_{x\to 2}\frac{x^2+ax+b}{x^2-x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{x^2+ax-4-2a}{x^2-x-2}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)+a(x-2)}{(x-2)(x+1)}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{x+2+a}{x+1}=\frac{4+a}{3}=2$$

$\therefore a=2,\ \ b=-8.$

Back

例13 设$\lim_{x\to 1} f(x)$存在, $f(x)=x^2+2x\lim_{x\to 1} f(x)$, 求$f(x)$.

解

例14 试确定常数 *a*, *b*,*c* 使 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{a(x-1)^2+b(x-1)+c-\sqrt{x^2+3}}{(x-1)^2}=0.$

解： 因为分母趋于零，而分式有极限，从而知分子必趋于零，即

$$\lim_{x\to 1} a(x-1)^2+b(x-1)+c-\sqrt{x^2+3}=0, \text{可得} c=2.$$

Back

2.3—2.4　极限的运算法则，极限存在准则

一、判断题（正确的结论打“√”，错误的结论打“×”）：

1. 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在，$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ 不存在，则 $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)+g(x)]$ 不存在.　（ √ ）

2. 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ 均不存在，则 $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)+g(x)]$ 不存在.　（ × ）

3. 设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B$，且 $A>B$，则存在 x_0 的一个去心邻域 $\mathring{U}(x_0)$，当 $x\in\mathring{U}(x_0)$ 时，$f(x)>g(x)$.　（ √ ）

4. 设 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to\infty} g(x)=B$，且 $f(x)>g(x)$，则 $A>B$.　（ × ）

5. $\lim\limits_{x\to 0} x\cdot\sin\dfrac{1}{x}=\lim\limits_{x\to 0} x\cdot\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}=0\cdot\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}=0$. 这样计算正确吗?　（ × ）

求函数极限的方法小结

(1) 分式函数极限求法

1) $x \to x_0$ 时, 用代入法　　**(分母不为 0)**

2) $x \to x_0$ 时, 对 $\frac{0}{0}$ 型 , 约去公因子

3) $x \to \infty$ 时 , 分子分母同除最高次幂　“ 抓大头 ”

(2) 复合函数极限求法　　设中间变量

(3)利用左右极限求分段函数极限.

二、填空：

1. 已知$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+ax+b}{x-1}=2$，则$a=$__________，$b=$__________.

2. 已知$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(1+a)x^4+bx^3+2}{x^3+x^2-1}=-2$，则$a=$__________，$b=$__________.

3. 极限$\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1})=$__________.