高等数学A

第3章 一元函数积分学

3.1 不定积分

3.1.6 有理函数的分解
3.1.7 有理函数的积分
3.1.8 三角函数的有理式的积分

中南大学开放式精品示范课堂高等数学建设组

3.1 不定积分

几类特殊函数的不定积分

- **3.1.6 有理函数的分解**
  - 有理函数的定义
  - 有理函数的性质
  - 有理函数的分解
- **3.1.7 有理函数的积分**
  - 有理函数的积分法
  - 有理函数积分习例2-7
- **3.1.8 三角有理式的积分**
  - 三角有理式的积分法
  - 三角有理式积分习例8-10

一、有理函数的分解

1. 有理函数的定义

形如 $$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m}$$

$(a_0\neq 0, b_0\neq 0; a_i, b_i\in R; m, n$为非负整数$)$.

的多项式分式称为有理函数。

当$n\geq m$时称为假分式,当$n<m$时称为真分式.

2. 有理函数的性质

(1) 任何有理假分式可化为多项式与有理真分式的和.

(2) 实系数多项式函数$Q(x)$在实数范围内可分解为一次因式与二次因式的乘积.

(3) $Q(x)$分解后,有理真分式$\dfrac{P(x)}{Q(x)}$可化为下列四种类型的简单部分分式之和

I. $\dfrac{A}{x-a}$;　　II. $\dfrac{A}{(x-a)^k}$;

III. $\dfrac{Mx+N}{x^2+px+q}$;　　IV. $\dfrac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}$.

若$Q(x)$中含有$(x-a)^k$,则分解后有下列k个部分分式之和：

$$\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\cdots+\frac{A_k}{(x-a)^k};$$

若$Q(x)$中含有$(x^2+px+q)^k$,则分解后有下列k个部分分式之和：

$$\frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q}+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^2}+\cdots+\frac{M_kx+N_k}{(x^2+px+q)^k}.$$

3.有理函数的分解

例1 利用**待定系数法**将下列有理函数分解为简单部分分式之和

$$(1)\ \frac{2x+3}{x^3+x^2-2x}$$

$$(2)\ \int \frac{4}{x^3+4x}dx.$$

$$(3)\ \int \frac{x^3+1}{x(x-1)^3}dx.$$

$$(1)\ \frac{2x+3}{x^3+x^2-2x}$$

解 $\because \dfrac{2x+3}{x^3+x^2-2x}=\dfrac{2x+3}{x(x-1)(x+2)}$,

设 $\dfrac{2x+3}{x(x-1)(x+2)}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x-1}+\dfrac{C}{x+2}$

$$=\frac{A(x-1)(x+2)+Bx(x+2)+Cx(x-1)}{x(x-1)(x+2)},$$

则 $2x+3=A(x-1)(x+2)+Bx(x+2)+Cx(x-1).$

则 $2x+3=A(x-1)(x+2)+Bx(x+2)+Cx(x-1).$

令 $x=0$, 得 $A=-\frac{3}{2}$,

令 $x=1$, 得 $B=\frac{5}{3}$,

令 $x=-2$, 得 $C=-\frac{1}{6}$.

$$\therefore \frac{2x+3}{x^3+x^2-2x}=-\frac{3}{2x}+\frac{5}{3(x-1)}-\frac{1}{6(x+2)},$$

$$(2)\int \frac{4}{x^3+4x}dx.$$

解 $\because \dfrac{4}{x^3+4x}=\dfrac{4}{x(x^2+4)},$

设 $\dfrac{4}{x(x^2+4)}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{Bx+C}{x^2+4}=\dfrac{A(x^2+4)+x(Bx+C)}{x(x^2+4)}$

$$=\frac{(A+B)x^2+Cx+4A}{x(x^2+4)},$$

得 $4=(A+B)x^2+Cx+4A,$

从而 $\begin{cases} A+B=0 \\ C=0 \\ 4A=4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=-1 \\ C=0 \end{cases}$ $\therefore \dfrac{4}{x^3+4x}=\dfrac{1}{x}-\dfrac{x}{x^2+4},$

$$(3)\int\frac{x^3+1}{x(x-1)^3}dx.$$

解 设 $\dfrac{x^3+1}{x(x-1)^3}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x-1}+\dfrac{C}{(x-1)^2}+\dfrac{D}{(x-1)^3}$

$$=\frac{A(x-1)^3+Bx(x-1)^2+Cx(x-1)+Dx}{x(x-1)^3},$$

得 $x^3+1=A(x-1)^3+Bx(x-1)^2+Cx(x-1)+Dx,$

令 $x=0$, 得 $A=-1$, 令 $x=1$, 得 $D=2$,

再比较x^3与x^2的系数得, $\begin{cases}A+B=1\\-3A-2B+C=0\end{cases}\rightarrow\begin{cases}B=2\\C=1\end{cases}$

$$\therefore\frac{x^3+1}{x(x-1)^3}=-\frac{1}{x}+\frac{2}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{2}{(x-1)^3}$$

二、有理函数的积分

1.有理函数的积分法

有理函数的积分可转化为计算简单有理分式的积分如下

$$\int \frac{dx}{x-a} = \ln|x-a| + C,$$

$$\int \frac{dx}{(x-a)^k} = \frac{1}{(1-k)(x-a)^{k-1}} + C \quad (k \neq 1),$$

$$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx = \frac{M}{2} \cdot \int \frac{2x+\frac{2N}{M}}{x^2+px+q}dx$$

$$= \frac{M}{2} \cdot \int \frac{(2x+p)+(\frac{2N}{M}-p)}{x^2+px+q}dx$$

$$= \frac{M}{2} \cdot \int \frac{d(x^2 + px + q)}{x^2 + px + q} + (N - \frac{Mp}{2}) \cdot \int \frac{dx}{x^2 + px + q}$$

$$= \frac{M}{2} \ln\left|x^2 + px + q\right| + (N - \frac{Mp}{2}) \cdot \int \frac{d(x + \frac{p}{2})}{(x + \frac{p}{2})^2 + (q - \frac{p^2}{4})}$$

$$= \frac{M}{2} \ln\left|x^2 + px + q\right|$$

$$+ (N - \frac{Mp}{2}) \cdot \frac{1}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}} \arctan \frac{x + \frac{p}{2}}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}} + C,$$

$$\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}dx$$

$$=\frac{M}{2}\cdot\int\frac{d(x^2+px+q)}{(x^2+px+q)^k}+(N-\frac{Mp}{2})\cdot\int\frac{dx}{(x^2+px+q)^k}$$

$$=\frac{M}{2}\cdot\frac{1}{(1-k)(x^2+px+q)^{k-1}}$$

$$+(N-\frac{Mp}{2})\cdot\int\frac{d(x+\frac{p}{2})}{[(x+\frac{p}{2})^2+(q-\frac{p^2}{4})]^k}.$$

这里的最后一项可用下面的递推公式算出（上节课的例18）

$$I_n=\frac{1}{2a^2(n-1)}\left[\frac{x}{(x^2+a^2)^{n-1}}+(2n-3)I_{n-1}\right]$$

2.有理函数的积分习例

有理函数积分的一般步骤:

先把被积函数化为部分分式之和(利用待定系数法),然后积分.

例2 计算 $\int \frac{2x+3}{x^3+x^2-2x}dx$

例3 计算 $\int \frac{4}{x^3+4x}dx$

例4 计算 $\int \frac{x^3+1}{x(x-1)^3}dx$

例5 计算 $\int \frac{3x^2+1}{x^3+x+1}dx$

例6 计算 $\int \frac{x^3}{(x-1)^{10}}dx$

例7 计算 $\int \frac{1}{x(x^{10}+2)}dx$

例2 计算$\int \frac{2x+3}{x^3+x^2-2x}dx$

解 利用有理函数的分解，得

$$\frac{2x+3}{x^3+x^2-2x}=-\frac{3}{2x}+\frac{5}{3(x-1)}-\frac{1}{6(x+2)},$$

$$\therefore \int \frac{2x+3}{x^3+x^2-2x}dx=\int[-\frac{3}{2x}+\frac{5}{3(x-1)}-\frac{1}{6(x+2)}]dx$$

$$=-\frac{3}{2}\ln|x|+\frac{5}{3}\ln|x-1|-\frac{1}{6}\ln|x+2|+C.$$

例3 计算$\int \frac{4}{x^3+4x}dx$

解 $\because \frac{4}{x^3+4x}=\frac{1}{x}-\frac{x}{x^2+4},$

$$\therefore \int \frac{4}{x^3+4x}dx=\int\left(\frac{1}{x}-\frac{x}{x^2+4}\right)dx$$

$$=\int \frac{1}{x}dx-\frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+4)}{x^2+4}$$

$$=\ln|x|-\frac{1}{2}\ln|x^2+4|+C.$$

例4　计算$\int \frac{x^3+1}{x(x-1)^3}dx$

解　$\because \frac{x^3+1}{x(x-1)^3} = -\frac{1}{x} + \frac{2}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{2}{(x-1)^3}$,

$$\therefore \int \frac{x^3+1}{x(x-1)^3}dx = \int [-\frac{1}{x} + \frac{2}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{2}{(x-1)^3}]dx$$

$$= -\ln|x| + 2\ln|x-1| - \frac{1}{x-1} - \frac{1}{(x-1)^2} + C.$$

注意:

(1) 总之,有理函数的不定积分都已解决,其原函数都是初等函数.

(2) 并非所有有理函数的不定积分都用此方法，有时用别的方法更方便.

例5 计算$\int \frac{3x^2+1}{x^3+x+1}dx$

解 $\int \frac{3x^2+1}{x^3+x+1}dx = \int \frac{d(x^3+x+1)}{x^3+x+1}$

$$= \ln\left|x^3+x+1\right| + C.$$

例6 计算$\int \frac{x^3}{(x-1)^{10}}dx$

解 $\int \frac{x^3}{(x-1)^{10}}dx \overset{x-1=t}{===} \int \frac{(t+1)^3}{t^{10}}dt$

$$= \int \frac{t^3+3t^2+3t+1}{t^{10}}dt$$

$$= \int (t^{-7}+3t^{-8}+3t^{-9}+t^{-10})dt$$

$$= -\frac{1}{6}t^{-6} - \frac{3}{7}t^{-7} - \frac{3}{8}t^{-8} - \frac{1}{9}t^{-9} + C$$

$$\overset{x-1=t}{===} -\frac{1}{6(x-1)^6} - \frac{3}{7(x-1)^7} - \frac{3}{8(x-1)^8} - \frac{1}{9(x-1)^9} + C.$$

例7 计算$\int \frac{1}{x(x^{10}+2)}dx$

解 $\int \frac{1}{x(x^{10}+2)}dx \xlongequal{\frac{1}{x}=t} -\int \frac{t^9}{1+2t^{10}}dt$

$= -\frac{1}{10}\int \frac{1}{1+2t^{10}}dt^{10} = -\frac{1}{20}\int \frac{1}{1+2t^{10}}d(1+2t^{10})$

$= -\frac{1}{20}\ln\left|1+2t^{10}\right| + C$

$\xlongequal{\frac{1}{x}=t} -\frac{1}{20}\ln\left|1+\frac{2}{x^{10}}\right| + C.$

三、三角函数有理式的积分

1.三角函数有理式的积分法

(1) $\int R(\sin x, \cos x)dx = \int \sin mx \cdot \cos nxdx$

或 $= \int \sin mx \cdot \sin nxdx$

或 $= \int \cos mx \cdot \cos nxdx$

方法: 用积化和差公式进行恒等变形后,再凑微分.

(2) $\int R(\sin x, \cos x)dx = \int \sin^m xdx$

或 $= \int \cos^m xdx$

方法:

当m为奇数时,用$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$变形后,再凑微分;

当m为偶数时,用倍角公式降幂后,再凑微分.

(3) $\int R(\sin x,\cos x)dx=\int \sin^m x\cdot\cos^n x dx$

方法: 当m,n中有一个为奇数时,用$\sin^2 x+\cos^2 x=1$变形后,再凑微分化为有理函数的积分;

当m,n都是偶数时,用倍角公式降幂后,再凑微分.

(4) $\int R(\sin x,\cos x)dx$

$$\because \sin x=\frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}},\qquad \cos x=\frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}},$$

令 $u=\tan\frac{x}{2}$, 得 $x=2\arctan u$, $dx=\frac{2du}{1+u^2}$.

$$\therefore \begin{cases} \sin x = \dfrac{2u}{1+u^2} \\ \cos x = \dfrac{1-u^2}{1+u^2} \\ dx = \dfrac{2du}{1+u^2} \end{cases} \text{——————万能代换.}$$

方法: $\therefore \int R(\sin x, \cos x)dx \xlongequal{u=\tan\frac{x}{2}} \int R(\frac{2u}{1+u^2}, \frac{1-u^2}{1+u^2}) \cdot \frac{2}{1+u^2}du.$

(5) $\int R(\sin x)\cos x dx$　　令 $u = \sin x$

$\int R(\cos x)\sin x dx$　　令 $u = \cos x$

(6) $\int R(\tan x)dx$ 或 $\int R(\sin^2 x, \cos^2 x)dx$　　令 $u = \tan x$

2.三角有理式的积分习例

例8　计算 $\int \sin^7 x \cdot \cos^6 x dx.$

例9　计算 $\int \sin^4 x \cdot \cos^2 x dx.$

例10 计算 $\int \dfrac{3-\sin x}{3+\cos x} dx.$

例8　计算 $\int \sin^7 x \cdot \cos^6 x dx.$

解 $\int \sin^7 x \cdot \cos^6 x dx = -\int \sin^6 x \cdot \cos^6 x d\cos x$

$$= -\int (1-\cos^2 x)^3 \cdot \cos^6 x d\cos x$$

$$= -\int (1-3\cos^2 x + 3\cos^4 x - \cos^6 x) \cdot \cos^6 x d\cos x$$

$$= \int (-\cos^6 x + 3\cos^8 x - 3\cos^{10} x + \cos^{12} x) d\cos x$$

$$= -\frac{1}{7}\cos^7 x + \frac{3}{9}\cos^9 x - \frac{3}{11}\cos^{11} x + \frac{1}{13}\cos^{13} x + C.$$

例9 计算 $\int \sin^4 x \cdot \cos^2 x dx.$

解 $\int \sin^4 x \cdot \cos^2 x dx = \int \sin^4 x \cdot (1-\sin^2 x) dx$

$= \int \sin^4 x dx - \int \sin^6 x dx$

$= \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 dx - \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^3 dx$

$= \frac{1}{4}\int (1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x) dx$

$- \frac{1}{8}\int (1 - 3\cos 2x + 3\cos^2 2x - \cos^3 2x) dx$

$= \cdots\cdots$

例10 计算 $\int \frac{3-\sin x}{3+\cos x}dx.$

解 $$\int \frac{3-\sin x}{3+\cos x}dx = \int \frac{3}{3+\cos x}dx - \int \frac{\sin x}{3+\cos x}dx$$

$$= \int \frac{3}{3+\cos x}dx + \int \frac{d(3+\cos x)}{3+\cos x}$$

$$= \int \frac{3}{3+\cos x}dx + \ln|3+\cos x|$$

从而 $$\int \frac{3}{3+\cos x}dx \overset{u=\tan\frac{x}{2}}{=\!=\!=\!=} \int \frac{3}{3+\frac{1-u^2}{1+u^2}} \cdot \frac{2}{1+u^2}du$$

$$= \int \frac{3}{u^2+2} du$$

$$= \frac{3}{\sqrt{2}} \arctan \frac{u}{\sqrt{2}} + C$$

$$= \frac{3}{\sqrt{2}} \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \tan \frac{x}{2}\right) + C$$

$$\therefore \int \frac{3-\sin x}{3+\cos x} dx = \frac{3}{\sqrt{2}} \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \tan \frac{x}{2}\right) + \ln\left|3+\cos x\right| + C$$