高等数学A

第4章 无穷级数

4.1 正项级数 4.2交错级数与任意项级数

4.1.3 正项级数及其收敛性(2)
4.2.1 交错级数及其审敛法
4.2.2 条件收敛与绝对收敛

中南大学开放式精品示范课堂高等数学建设组

4. 1 正项级数 4. 2交错级数与任意项级数

正项级数交错级数与任意项级数

- 4.1.3正项级数及其收敛性
  - 比值法(达朗贝尔D'Alembert判别法)
  - 习例1
  - 根值法(柯西Cauchy判别法)
  - 习例2
- 4.2.1 交错级数及其审敛法
  - 莱布尼兹Leibnitz判别法
  - 习例3
- 4.2.2 条件收敛与绝对收敛
  - 绝对收敛定理
  - 习例4
  - 绝对收敛与条件收敛定义
  - 判别交错级数的发散性及习例5
  - 判别一般项级数的发散性
  - 级数收敛的必要条件的应用及习例6
- 综合习例

一、正项级数审敛法

1. 比值审敛法(达朗贝尔D'Alembert判别法)：

定理 1 设$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$是正项级数，如果$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\rho$ (ρ数或$+\infty$)

则 (1) $\rho<1$时级数收敛；

(2) $\rho>1$时级数发散；

(3) $\rho=1$时失效.

证 当ρ为有限数时，对$\forall\varepsilon>0$,

$\exists N$，当$n>N$时，有$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}-\rho\right|<\varepsilon$,

即 $$\rho-\varepsilon<\frac{u_{n+1}}{u_n}<\rho+\varepsilon \quad (n>N)$$

(1)当$\rho<1$时，取$\varepsilon<1-\rho$，使$r=\varepsilon+\rho<1$,

$$u_{N+2}<ru_{N+1},\quad u_{N+3}<ru_{N+2}<r^2u_{N+1},\quad \cdots,$$

$$u_{N+m}<r^{m-1}u_{N+1},\quad \text{而级数}\sum_{m=1}^{\infty}r^{m-1}u_{N+1}\text{收敛},$$

$$\therefore \sum_{m=1}^{\infty}u_{N+m}=\sum_{n=N+1}^{\infty}u_u\text{收敛}.$$

(2)当$\rho>1$时，取$\varepsilon<\rho-1$，使$r=\rho-\varepsilon>1$,

当$n>N$时，$u_{n+1}>ru_n>u_n$，$\lim\limits_{n\to\infty}u_n\neq 0$. 故级数发散.

(3)$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散，但$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$;

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$收敛，但$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{(n+1)^2}=1$.

比值法习例

例 1　判别下列级数的收敛性:

$$(1)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!};\qquad (2)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{10^{n}};\qquad (3)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)\cdot 2n}.$$

例 1 判别下列级数的收敛性:

$$(1)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!};\quad (2)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{10^n};\quad (3)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)\cdot 2n}.$$

解 $(1)\because \lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0<1,$

由正项级数的比值审敛法知原级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$ 收敛.

$$(2)\because \lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{10^{n+1}}\cdot\frac{10^n}{n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{10}=\infty>1,$$

由正项级数的比值审敛法知原级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{10^n}$ 发散.

$$(3)\because \lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n-1)\cdot 2n}{(2n+1)\cdot(2n+2)}=1,$$

比值审敛法失效, 改用比较审敛法

$$\because \frac{1}{(2n-1)\cdot 2n}<\frac{1}{n^2},$$ 而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛,

由正项级数的比较审敛法知原级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n\cdot(2n-1)}$ 收敛.

说明:比值审敛法一般适用于级数通项中含 $n!, n^{\alpha}, \alpha^{n}$ 等因子的形式的正项级数.

2. 根值审敛法(柯西Cauchy判别法):

定理 2. 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 是正项级数, 如果

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \rho \quad (\rho\text{为数或}+\infty),$$

则(1)$\rho < 1$时级数收敛;

(2)$\rho > 1$时级数发散;

(3)$\rho = 1$时失效.

证 从略.

注意 (1)当通项含有$n!$或连乘积时,优先选择比值审敛法

(2)当通项含有n次方时,优先选择根值审敛法

(3)当$\rho = 1$时,比值法与根值法都失效,

须用比较法或比较法的极限形式.

根值法习例

例2 判别级数的敛散性:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\cdot5\cdot8\cdots[2+3(n-1)]}{1\cdot5\cdot9\cdots[1+4(n-1)]}$; (2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n\cdot n!}{n^n}$

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+\frac{1}{n^2})$; (4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3+(-1)^n}{2^n}$.

例2 判别级数的敛散性：

$$(1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\cdot5\cdot8\cdots[2+3(n-1)]}{1\cdot5\cdot9\cdots[1+4(n-1)]};\qquad (2)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n\cdot n!}{n^n}$$

$$(3)\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+\frac{1}{n^2});\qquad (4)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3+(-1)^n}{2^n}.$$

解 $(1)\because \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2+3n}{1+4n}=\dfrac{3}{4}<1,$

由正项级数的比值审敛法知原级数收敛.

$$(2)\because \lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n^n}{3^n n!}=\lim_{n\to\infty}3(\frac{n}{n+1})^n$$

$$=\frac{3}{e}>1,$$

由正项级数的比值审敛法知原级数发散.

$$(3)\because \lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(1+\frac{1}{n^2})}{\frac{1}{n^2}}=1>0,$$

而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛, 由正项级数的比较法知原级数收敛.

$$(4)\because \lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{3+(-1)^{n+1}}{3+(-1)^n}\text{不存在,}$$

故不能用比值法，可用根值法和比较法来判别.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{3+(-1)^n}}{2}=\frac{1}{2}<1,\text{ 所以原级数收敛.}$$

或 $\frac{3+(-1)^n}{2^n}\le\frac{4}{2^n}$, 且 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{2^n}$ 收敛, 所以原级数收敛.

小结

上述判别正项级数敛散性的四个审敛法，都是充分条件，如果用其中的某一个审敛法不能判定所给级数的敛散性，那么就要改用其它的审敛法以及级数收敛与发散的定义，收敛的性质、必要条件等去判别，这需要学生通过练习不断总结各种方法优劣及适用范围，熟练而灵活地使用它们。

二、交错级数及其审敛法

1. 定义： 正、负项相间的级数称为交错级数.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n \text{或} \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n \quad (\text{其中} u_n > 0)$$

2. 判别法(定理 3)：

Leibnitz 定理 如果交错级数满足条件：

（ⅰ）$u_n \geq u_{n+1}$ $(n = 1,2,3,\cdots)$；（ⅱ）$\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$，

则级数收敛, 且其和 $s \leq u_1$，其余项 r_n 的绝对值

$|r_n| \leq u_{n+1}$.

证 $\because u_{n-1} - u_n \geq 0,$

$\because s_{2n} = (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + \cdots + (u_{2n-1} - u_{2n})$

数列s_{2n}是单调增加的，

又 $s_{2n} = u_1 - (u_2 - u_3) - \cdots - (u_{2n-2} - u_{2n-1}) - u_{2n}$

$\leq u_1$

数列s_{2n}是有界的，

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} s_{2n} = s \leq u_1.$

$\because \lim\limits_{n\to\infty} u_{2n+1} = 0,$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} s_{2n+1} = \lim_{n\to\infty}(s_{2n} + u_{2n+1}) = s,$$

$\therefore$ 级数收敛于和 s, 且$s \le u_1$.

余项 $r_n = \pm(u_{n+1} - u_{n+2} + \cdots)$,

$$|r_n| = u_{n+1} - u_{n+2} + \cdots,$$

满足收敛的两个条件, $\therefore |r_n| \le u_{n+1}$.

例 3 判别级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n\sqrt{n}}{n-1}$ 的收敛性.

解 $\because (\frac{\sqrt{x}}{x-1})' = \frac{-(1+x)}{2\sqrt{x}(x-1)^2} < 0 \quad (x \geq 2)$

故函数 $\frac{\sqrt{x}}{x-1}$ 单调递减,

$\therefore u_n > u_{n+1}$,

又 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{n-1} = 0.$

原级数收敛.

用Leibnitz **判别法**判别下列级数的敛散性:

1) $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+($

2) $1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}-\frac{1}{4!}+\cdots$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{\dfrac{n+1}{10^{n+1}}}{\dfrac{n}{10^n}}=\frac{1}{10}\cdot\frac{n+1}{n}$$

3) $\frac{1}{10}-\frac{2}{10^2}+\frac{3}{10^3}-\frac{4}{10^4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{n}{10^n}+\cdots$ 收敛

上述级数各项取绝对值后所成的级数是否收敛？

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$; 发散 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$; 收敛 3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{10^n}$. 收敛

三、条件收敛与绝对收敛

1. 定义: 正项和负项任意出现的级数称为任意项级数.

即级数中含有无穷多个正项和负项，且排列是任意的.

绝对收敛定理

定理 4. 若$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$收敛, 则$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛.

证 令 $v_n=\frac{1}{2}(u_n+|u_n|)\quad(n=1,2,\cdots)$,

显然$v_n=\begin{cases}u_n & u_n>0\\ 0 & u_n\le 0\end{cases}$,即$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$为正项级数,

且$v_n\le|u_n|$, $\therefore\sum_{n=1}^{\infty}v_n$收敛,

又$\sum_{n=1}^{\infty}u_n=\sum_{n=1}^{\infty}(2v_n-|u_n|)$, $\therefore\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛.

以上定理的作用：

任意项级数 $\Longrightarrow$ 正项级数

定义：若 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛，则称 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 为绝对收敛；

若 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 发散，而 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则称 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 为条件收敛.

注意： (1)若 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛；

(2)若 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 发散，而 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 不一定发散.

如 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，而 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ 收敛.（条件收敛）

绝对收敛定理应用习例

绝对收敛定理的作用：

任意项级数 $\Longrightarrow$ 正项级数

例4 判别级数的敛散性：

$$(1)\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n!}{n^n};\quad (2)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha^n}{n!}\quad(\alpha\in R);\quad (3)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n^2}.$$

解 (1)考虑加绝对值后的级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$,

$$\because \lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\frac{n^n}{n!}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=\frac{1}{e}<1,$$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$收敛， 故原级数绝对收敛.

(2)考虑加绝对值后的级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\alpha|^n}{n!}$,

$$\because \lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{|\alpha|^{n+1}}{(n+1)!}\frac{n!}{|\alpha|^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{|\alpha|}{n+1}=0<1,$$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\alpha|^n}{n!}$收敛, 故原级数绝对收敛.

(3) $\because \left|\frac{\sin n}{n^2}\right|\le\frac{1}{n^2}$, 而$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$收敛,

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\sin n}{n^2}\right|$收敛, 故由定理知原级数绝对收敛.

例5 级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt{n+1}}$ 是否绝对收敛?

解

$$\left|(-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right| = \frac{1}{\sqrt{n+1}} > \frac{1}{n+1}$$

由调和级数的发散性可知, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}$ 发散,

故 $\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right|$ 发散.

原级数是一个交错级数，且满足：

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} > \frac{1}{\sqrt{n+2}} = \frac{1}{\sqrt{(n+1)+1}} = u_{n+1},$$

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0,$$

由莱布尼兹判别法可知，该交错级数收敛.

故原级数是条件收敛，不是绝对收敛的.

4. 判别一般项级数的发散性:

若用比值法判定$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$发散,则原级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$发散.

即若级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$满足

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \rho$$

则(1)当$\rho < 1$时,$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$绝对收敛;

(2)当$\rho > 1$时,$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$发散.

5. 利用级数收敛的必要条件可证明: $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0.$

例6　证明 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n}{n!} = 0 \ (a > 1).$

证　考虑级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a^n}{n!} \quad (a > 1),$

$$\because \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{a^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a}{n+1} = 0 < 1,$$

所以该级数收敛.

从而 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n}{n!} = 0 \ (a > 1).$

综合习例

例7 判别级数的敛散性：

$$(1)\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{n+1};$$

$$(2)\sum_{n=1}^{\infty}u_n=1-\left(\frac{1}{7}\right)^2+\frac{1}{3^2}-\left(\frac{1}{7}\right)^4+\frac{1}{5^2}-\left(\frac{1}{7}\right)^6+\cdots$$

例8 判别下列级数是绝对收敛,条件收敛,发散?

$$(1)\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{2n+100}{3n+1}\right)^n;\quad (2)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot\cos\frac{2n\pi}{3}}{2^n};\quad (3)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{2n+1}};$$

$$(4)\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sqrt{2^n}}{n^{10}};\quad (5)\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left[1-\frac{(n-1)^2}{(n+1)^2}\right].$$

例7 判别级数的敛散性：

$$(1)\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{n+1};$$

$$(2)\sum_{n=1}^{\infty}u_n=1-(\frac{1}{7})^2+\frac{1}{3^2}-(\frac{1}{7})^4+\frac{1}{5^2}-(\frac{1}{7})^6+\cdots$$

解 (1) $\because \lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1\neq 0,$ 所以原级数发散.

(2) $\because \sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}[\frac{1}{(2n-1)^2}-(\frac{1}{7})^{2n}]$

而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{7})^{2n}$都收敛．所以原级数收敛.

但显然不满足$u_n\geq u_{n+1}$.

例8 判别下列级数是绝对收敛,条件收敛,发散?

$$(1)\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{2n+100}{3n+1}\right)^n;$$

解 考虑 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+100}{3n+1}\right)^n$,

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{2n+100}{3n+1}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+100}{3n+1}=\frac{2}{3}<1$$

故原级数绝对收敛.

$$(2)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot\cos\frac{2n\pi}{3}}{2^n};$$

解 考虑 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot\left|\cos\frac{2n\pi}{3}\right|}{2^n}$, 且 $\frac{n\cdot\left|\cos\frac{2n\pi}{3}\right|}{2^n}\le\frac{n}{2^n}$,

对于 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$, $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2^{n+1}}\cdot\frac{2^n}{n}=\frac{1}{2}<1$,

故原级数绝对收敛.

$$(3)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{2n+1}};$$

解 考虑 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$, 此级数发散.

但 $\frac{1}{\sqrt{2n+1}} > \frac{1}{\sqrt{2(n+1)+1}}$, 即 $u_n > u_{n+1}$,

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2n+1}} = 0,$$

原级数是莱布尼茨型交错级数，故原级数条件收敛.

$$(4)\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sqrt{2^n}}{n^{10}};$$

解 考虑 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{2^n}}{n^{10}}$,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2^{n+1}}}{(n+1)^{10}}\cdot\frac{n^{10}}{\sqrt{2^n}}=\sqrt{2}>1,$$

故原级数发散.

$$(5)\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n[1-\frac{(n-1)^2}{(n+1)^2}].$$

解 考虑 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n}{(n+1)^2}$, 此级数发散.

易得 $u_n > u_{n+1}$, $\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}\frac{4n}{(n+1)^2} = 0$,

故原级数条件收敛.

内容小结

1. 利用正项级数审敛法

必要条件 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$ $\xrightarrow[\text{不满足}]{}$ 发　散

满足 $\downarrow$

比值审敛法 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \rho$

根值审敛法 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \rho$

$\xrightarrow{\rho = 1}$ 不定 用它法判别

比较审敛法

部分和极限

积分判别法

$\rho < 1$ $\downarrow$ 收　敛

$\rho > 1$ $\downarrow$ 发　散

2. 利用绝对收敛定理和莱布尼兹判别法讨论任意项级数的绝对收敛与条件收敛

对任意项级数,先用正项级数的审敛法判断它是否绝对收敛,否则,再用莱布尼兹审敛法判断它是否收敛,若收敛,则知它是条件收敛.

此次课内容较多，数项级数敛散性判别法的重点，难点全在这部分，要求学生必须熟记如下定理：比较审敛法、比较审敛法的极限形式、比值审敛法和柯西判别法（这些定理只适合于正项级数）；莱布尼兹判别法（适当于交错级数）；任意项级数的绝对收敛和条件收敛，这些判别法在运用过程中不能混用，学生可以通过练习熟练掌握其中的知识技巧。