---○---○---

学　　院
专业班级
学　　号
姓　　名
座　位　号
任课教师姓名

---○---○---

……评卷密封线……密封线内不要答题，密封线外不准填写考生信息，违者考试成绩按 0 分处理……评卷密封

中南大学考试试卷

2014 ~2015 学年 二学期 高等数学 A（二）

（时间：15 年 7 月 2 日，星期四，10：00—11：40，共计：100 分钟）

80 学时， 5 学分，闭卷，总分 100 分，占总评成绩 70 %

题　号	一	二	三	四	五	六	七	八	合　计
满　分	15	15	10	10	10	18	10	12	100
得　分									
评卷人									
复查人									

得　分	
评卷人	

一、填空题（每小题 3 分，总计 15 分）

1、点 $A(3,-1,1)$ 到平面 $\pi: 2x-y+3z-4=0$ 的距离为

$d=\dfrac{|2\times3-(-1)+3\times1-4|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+3^2}}=\dfrac{6}{\sqrt{14}}$

2、曲面 $z=2x^2+2y^2-4$ 在点 $(1,-1,0)$ 处的法线方程为 $\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y+1}{-4}=\dfrac{z}{-1}$

3、设 Ω 是由曲面 $z=x^2+y^2$ 及平面 $z=1$ 围成的闭区域，则 $\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$

化为顺序为 $z\to y\to x$ 的三次积分为 $\int_{-1}^{1}dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}dy\int_{x^2+y^2}^{1}f(x,y,z)dz$

4、设 Σ 是 xoz 面的一个闭区域 D_{xz}，则曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}S$ 可化为二重积分

为 $\iint\limits_{D_{xz}} f(x,0,z)dxdz$

5、微分方程 $y'=\dfrac{1}{2x-y^2}$ 满足初始条件 $y(1)=0$ 的解为 $x=\dfrac{1}{2}y^2+\dfrac{1}{2}y+\dfrac{1}{4}+\dfrac{3}{4}e^{2y}$

得 分	
评卷人	

二、选择题（在每个小题四个备选答案中选出一个正确答案，填在括号中，每小题 3 分，总计 15 分）

1、双曲线$\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{z^2}{5}=1\\ y=0\end{cases}$绕$z$轴旋转而成的曲面为（　A　）

（A）$\dfrac{x^2+y^2}{4}-\dfrac{z^2}{5}=1$；　　（B）$\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2+z^2}{5}=1$；

（C）$\dfrac{(x+y)^2}{4}-\dfrac{z^2}{5}=1$；　　（D）$\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{(y+z)^2}{5}=1$

2、若函数$f(x,y)$在区域D内具有二阶偏导数$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2},\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2},\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y},\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$，则（　D　）

(A) 必有$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$；　　（B）则$f(x,y)$在区域$D$内必连续；

(C) 则$f(x,y)$在区域D内必可微；　　(D) 以上都不对

3、设$I=\iint\limits_D xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中$D$由$y^2=x$及$y=x-2$所围成，则化为二次积分后的结果为$I=$（　B　）

（A）$\int_0^4 dx\int_{y+2}^{y^2}xydy$；　　（B）$\int_{-1}^2 dy\int_{y^2}^{y+2}xydx$；

（C）$\int_0^1 dx\int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}}xydy+\int_1^4 dx\int_{x-2}^{x}xydy$　　（D）$\int_{-1}^2 dx\int_{y^2}^{y+2}xydy$

4、设L为直线$x+y=2$介于点$(0,2)$到点$(2,0)$的一段，则$\int_L\sqrt{x+y}ds=$（　A　）

（A）4；　（B）$2\sqrt{2}$；　（C）$\sqrt{2}$；　（D）2．

5、设y_1与y_2都是微分方程$y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$的解，　则（　D　）．

（A）y_1+y_2也是方程的解；　　（B）y_1-y_2也是方程的解

（C）y_1-2y_2也是方程的解　　（D）$2y_1-y_2$也是方程的解

得 分	
评卷人	

三、（10 分） 设平面 Π : $2x-4y-z-5=0$ ，且直线 $l:\begin{cases} x+y+b=0 \\ x+ay-z-3=0 \end{cases}$ 在平面 Π 上，求 a,b 的值.

解法一：由 $l:\begin{cases} x+y+b=0 \\ x+ay-z-3=0 \end{cases}$ 可得 $y=-(x+b), z=x-a(x+b)-3$，代入平面 Π 方程，有 $5+a=0, 4b+ab-2=0$，解得 $a=-5, b=-2$.

解法二：过直线 l 的平面束方程设为 $x+ay-z-3+\lambda(x+y+b)=0$

（或 $x+y+b+\lambda(x+ay-z-3)=0$），即

$(1+\lambda)x+(a+\lambda)y-z-3+\lambda b=0$ （或 $(1+\lambda)x+(1+\lambda a)y-\lambda z+b-3\lambda=0$），

由题意知 $\dfrac{1+\lambda}{2}=\dfrac{a+\lambda}{-4}=\dfrac{-1}{-1}$ （或 $\dfrac{1+\lambda}{2}=\dfrac{1+\lambda a}{-4}=\dfrac{-\lambda}{-1}$），

解得 $a=-5, \lambda=1$，将 $a=-5, \lambda=1$ 及平面 Π 上的点 $(1,-2,5)$ 代入平面束方程，求得 $b=-2$.

得 分	
评卷人	

四、（10 分）

已知函数 $f(x,y)=x+y+xy$，曲线 $C: x^2+y^2+xy=3$，求 $f(x,y)$ 在曲线 C 上的最大方向导数.

解： 最大方向导数即为梯度的模，

$$grad f(x,y)=(1+y,1+x), \qquad \left|grad f(x,y)\right|=\sqrt{(1+x)^2+(1+y)^2}$$

令 $F(x,y,\lambda)=(1+x)^2+(1+y)^2+\lambda(x^2+y^2+xy-3)$，由

$$\begin{cases} F_x=2(1+x)+\lambda(2x+y)=0 \\ F_y=2(1+y)+\lambda(2y+x)=0 \\ x^2+y^2+xy-3=0 \end{cases}，解得 \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}, \begin{cases} x=2 \\ y=-1 \end{cases}, \begin{cases} x=-1 \\ y=-1 \end{cases}, \begin{cases} x=-1 \\ y=2 \end{cases},$$

比较： $\left|grad f(1,1)\right|=2\sqrt{2}$， $\left|grad f(2,-1)\right|=\left|grad f(-1,2)\right|=3$，

$\left|grad f(-1,-1)\right|=0$，所以 $f(x,y)$ 在曲线 C 上的最大方向导数为 3.

评卷密封线……密封线内不要答题，密封线外不准填写考生信息，违者考试成绩按 0 分处理……评卷密封线

得 分	
评卷人	

五、（10 分）计算由旋转抛物面 $z=6-x^2-y^2$ 及锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 所围成的立体的体积.

解法一：（与练习册 P84 第二大题类似）

$$V=\iiint_{\Omega}dv=\iint_{D_{xy}}rdrd\theta\int_r^{6-r^2}dz=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2(6-r^2-r)rdr=\frac{32}{3}\pi.$$

解法二：

$$V=V_1+V_2=\int_0^2dz\iint_{D_{z_1}}dxdy+\int_2^6dz\iint_{D_{z_2}}dxdy=\int_0^2\pi z^2dz+\int_2^6\pi(6-z)dz=\frac{8}{3}\pi+8\pi=\frac{32}{3}\pi.$$

评卷密封线……………密封线内不要答题，密封线外不准填写考生信息，违者考试成绩按0分处理……………评卷密封线……………

得 分	

六、求解下列各题（每题 9 分，共 18 分）

1、计算 $I=\iint\limits_{D}\max\{xy,1\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $D=\{(x,y)|0\le x\le 2,0\le y\le 2\}$.

解：

$$I=\iint\limits_{D_1}dxdy+\iint\limits_{D_2}dxdy+\iint\limits_{D_3}xydxdy \qquad （4 分）$$

$$=1+\int_{\frac{1}{2}}^{2}dx\int_{0}^{\frac{1}{x}}dy+\int_{\frac{1}{2}}^{2}dx\int_{\frac{1}{x}}^{2}xydy \qquad （8 分）$$

$$=\frac{19}{4}+\ln 2 \qquad （9 分）$$

2、计算 $I=\int_{L}(1+y)dx+(x+e^{\sin y})dy$，其中 L 是从 $A(1,0)$ 沿 $y=\sqrt{1-x^2}$ 到 $B(-1,0)$ 的一段曲线.

解：（与练习册 P96 第四大题类似）

因为 $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}=1$，所以该曲线积分与路径无关，

选择积分路径从 $A(1,0)$ 沿 x 轴到 $B(-1,0)$，易得 $I=\int_{1}^{-1}(1+0)dx=-2$.

得 分	
评卷人	

七、（10 分）计算 $I=\oiint\limits_{\Sigma} xydydz+yzdzdx+xzdxdy$，其中 Σ 是平面 $x=0,y=0,z=0,x+y+z=2$ 所围空间区域整个边界曲面的外侧.

解法一：利用高斯公式，

$$I=\oiint\limits_{\Sigma} xydydz+yzdzdx+xzdxdy=\iiint\limits_{\Omega}(y+z+x)dv$$

$$\overset{\text{对称性}}{=}3\iiint\limits_{\Omega} zdv=3\int_0^2 dx\int_0^{2-x}dy\int_0^{2-x-y}zdz=3\int_0^2\frac{(2-x)^3}{6}dx=2.$$

解法二：在平面 $x=0,y=0,z=0$ 上，积分值为 0，只需计算 $\Sigma':x+y+z=2$（取上侧）上的积分. 因 $\cos\alpha=\cos\beta=\cos\gamma=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$，利用两类曲面积分的联系，有

$$I=\iint\limits_{\Sigma'} xydydz+yzdzdx+xzdxdy=\iint\limits_{\Sigma'}(xy+yz+xz)\frac{1}{\sqrt{3}}dS\overset{dS=\sqrt{3}dxdy}{=}\iint\limits_{\Sigma'}(xy+yz+xz)dxdy$$

$$=\iint\limits_{D_{xy}}\left[xy+y(2-x-y)+x(2-x-y)\right]dxdy=\int_0^2 dx\int_0^{2-x}(-x^2-y^2-xy+x+y)dy=2\,.$$

解法三：在平面 $x=0,y=0,z=0$ 上，积分值为 0，只需计算 $\Sigma':x+y+z=2$（取上侧）上的积分.

$$\iint\limits_{\Sigma'} xzdxdy=\iint\limits_{D_{xy}} x(2-x-y)dxdy=\int_0^2 xdx\int_0^{2-x}(2-x-y)dy=\frac{2}{3}.$$

由被积函数和积分曲面关于积分变量的对称性，可得

$\displaystyle\iint\limits_{\Sigma'} xydydz=\iint\limits_{\Sigma'} yzdzdx=\iint\limits_{\Sigma'} xzdxdy=\frac{2}{3}$，所以，$I=3\cdot\dfrac{2}{3}=2$.

得　分	
评卷人	

八、（12 分）

设函数 $f(u)$ 具有二阶连续导数， $z=f(e^x\cos y)$ 满足 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=(4z+e^x\cos y)e^{2x}$，若 $f(0)=0,\quad f'(0)=0$，

(1)证明： $f''(u)=4f(u)+u$；（2）求 $f(u)$ 的表达式.

解：（与教材 P345 例 6.3.5 类似）

（1）因为

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f'(e^x\cos y)e^x\cos y,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f''(e^x\cos y)e^{2x}\cos^2 y+f'(e^x\cos y)e^x\cos y,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-f'(e^x\cos y)e^x\sin y,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f''(e^x\cos y)e^{2x}\sin^2 y-f'(e^x\cos y)e^x\cos y,$$

所以, 已知条件 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=(4z+e^x\cos y)e^{2x}$ 化为

$$f''(e^x\cos y)e^{2x}=\left[4f(e^x\cos y)+e^x\cos y\right]e^{2x},$$

所以函数 $f(u)$ 满足方程 $f''(u)=4f(u)+u$.

方程 $f''(u)=4f(u)+u$ 的特征方程为 $r^2-4=0$，得特征根 $r_{1,2}=2$

所以，其对应齐次方程的通解为 $f(u)=C_1e^{2u}+C_2e^{-2u}$，

设非齐方程的特解为 $y^*=Au+B$，代入原方程，得 $A=-\frac{1}{4},B=0$

得非齐方程的一个特解为 $y^*=-\frac{u}{4}$，

故方程的通解为 $f(u)=C_1e^{2u}+C_2e^{-2u}-\frac{u}{4}$，

由 $f(0)=0,\quad f'(0)=0$ 得 $\begin{cases}C_1+C_2=0\\2C_1-2C_2-\frac{1}{4}=0\end{cases}$，得 $C_1=\frac{1}{16},C_2=-\frac{1}{16}$，

评卷密封线……密封线内不要答题，密封线外不准填写考生信息，违者考试成绩按 0 分处理……评卷密封线

故 $f(u)=\frac{1}{16}(e^{2u}-e^{-2u}-4u)$.