错误！未找到引用源。

微分方程公式运用表

一、 一阶微分方程

判断特征：$\frac{dy}{dx}=f(x,y)$

类型一：$\frac{dy}{dx}=g(x)h(y)$（可分离变量的方程）

解法（分离变量法）：$\frac{dy}{h(y)}=g(x)dx$，然后两边同时积分。

类型二：$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)$（一阶线性方程）

解法（常数变易法）：$y=e^{-\int P(x)dx}(C+\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx)$

类型三：$\frac{dy}{dx}=f(x,y)=f(tx,ty)$（一阶齐次性方程）

解法（换元法）：$令u=\frac{y}{x}\Rightarrow 类型一$

类型四：$\frac{dy}{dx}+\mathrm{P}(x)\mathrm{y}=\mathrm{Q}(x)\mathrm{y}^{n}$（伯努利方程）

解法（同除法）：$y^{-n}\frac{dy}{dx}+P(x)y^{1-n}=Q(x)\Rightarrow 类型二$

二、 可降阶的高阶微分方程

类型一：$y^{(n)}=f(x)$

解法（多次积分法）：$令u=y^{(n-1)}\Rightarrow\frac{du}{dx}=f(x)\Rightarrow 多次积分求f(x)$

类型二：$y''=f(x,y')$

解法：$令p=y'\Rightarrow\frac{dp}{dx}=f(x,p)\Rightarrow 一阶微分方程$

类型三：$y''=f(y,y')$

解法：$令p=y'\Rightarrow\frac{dp}{dx}=\frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx}=p\frac{dp}{dy}\Rightarrow f(y,p)\Rightarrow 类型二$

三、线性微分方程

类型一：$y''+P(x)y'+Q(x)y=0$（二阶线性齐次微分方程）

解法：找出方程的两个任意线性不相关特解：$y_1(x),y_2(x)$

则：$y(x)=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)$

类型二：$y''+P(x)y'+Q(x)y=f(x)$（二阶线性非齐次微分方程）

解法：先找出对应的齐次微分方程的通解：$y_3(x)=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)$

再找出非齐次方程的任意特解 $y_p(x)$，则：$y(x)=y_p(x)+c_1y_1(x)+c_2y_2(x)$

类型三：$y''+py'+q=0$（二阶线性常系数齐次微分方程）

解法（特征方程法）：$\lambda^2+p\lambda+q=0\Rightarrow\lambda_{1,2}=\dfrac{-p\pm\sqrt{p^2-4q}}{2}$

（一）$\Delta=p^2-4q>0\Rightarrow\lambda_1\neq\lambda_2\Rightarrow y=c_1e^{\lambda_1x}+c_2e^{\lambda_2x}$

（二）$\Delta=0\Rightarrow\lambda_1=\lambda_2=\lambda\Rightarrow y=(c_1+c_2x)e^{\lambda x}$

（三）$\Delta<0\Rightarrow\lambda_1=\alpha+i\beta,\lambda_2=\alpha-i\beta\Rightarrow y=e^{\alpha x}(c_1\cos\beta x+c_2\sin\beta x)$

类型四：$y''+py'+q=f(x)$(二阶线性常系数非齐次微分方程)

解法（待定系数法）：

（1）$f(x)=P_m(x)\bullet e^{\alpha x}$ 型：先找出对应齐次微分方程的通解 $y_3(x)$

$$\Rightarrow y_p(x)=x^ke^{\alpha x}Q_m(x)\begin{cases}\alpha\text{不是特征方程的根，}k=0\\ \alpha\text{是特征方程的单根，}k=1\\ \alpha\text{是特征方程的二重根，}k=2\end{cases}$$

其中令 $Q_m(x)=Ax^m+Bx^{m-1}+\cdots$，将 $y_p(x)$ 带入方程求出 **A,B,C**

$$\Rightarrow y=y_p(x)+y_3(x)$$

（2）$f(x)=e^{\alpha x}\left[P_m(x)\cos\beta x+P_l(x)\sin\beta x\right]$ 型：先找出对应齐次微分方程的通解 $y_3(x)$

$$\Rightarrow y_p(x)=x^ke^{\alpha x}\left[Q_n(x)\cos\beta x+R_n(x)\sin\beta x\right]\begin{cases}n=\max\{m,l\}\\ Q_n(x)\text{与}R_n(x)\text{是待定的n次多项式}\\ \text{若}\alpha\pm i\beta\text{不是特征方程的根，}k=0\\ \text{若}\alpha\pm i\beta\text{是特征方程的根,}k=1\end{cases}$$

利用待定系数求出 $y_p(x)$，则：$y=y_p(x)+y_3(x)$