

## 三角函数公式大全

### 两角和公式

$$\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$$

$$\sin(A-B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$$

$$\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$$

$$\cos(A-B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$$

$$\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$$

$$\tan(A-B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B}$$

$$\cot(A+B) = \frac{\cot A \cot B - 1}{\cot B + \cot A}$$

$$\cot(A-B) = \frac{\cot A \cot B + 1}{\cot B - \cot A}$$

### 倍角公式

$$\tan 2A = \frac{2 \tan A}{1 - \tan^2 A}$$

$$\sin 2A = 2 \sin A \cdot \cos A$$

$$\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A = 2 \cos^2 A - 1 = 1 - 2 \sin^2 A$$

### 三倍角公式

$$\sin 3A = 3 \sin A - 4(\sin A)^3$$

$$\cos 3A = 4(\cos A)^3 - 3 \cos A$$

$$\tan 3a = \tan a \cdot \tan\left(\frac{\pi}{3} + a\right) \cdot \tan\left(\frac{\pi}{3} - a\right)$$

### 半角公式

$$\sin\left(\frac{A}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 - \cos A}{2}}$$

$$\cos\left(\frac{A}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 + \cos A}{2}}$$

$$\tan\left(\frac{A}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 - \cos A}{1 + \cos A}}$$

$$\cot\left(\frac{A}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 + \cos A}{1 - \cos A}}$$

$$\tan\left(\frac{A}{2}\right) = \frac{1 - \cos A}{\sin A} = \frac{\sin A}{1 + \cos A}$$

### 和差化积

$$\sin a + \sin b = 2 \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}$$

$$\sin a - \sin b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}$$

$$\cos a + \cos b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}$$

$$\cos a - \cos b = -2 \sin \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}$$

$$\tan a + \tan b = \frac{\sin(a+b)}{\cos a \cos b}$$

### 积化和差

$$\sin a \sin b = -\frac{1}{2} [\cos(a+b) - \cos(a-b)]$$

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a+b) + \cos(a-b)]$$

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a+b) + \sin(a-b)]$$

$$\cos a \sin b = \frac{1}{2} [\sin(a+b) - \sin(a-b)]$$

### 诱导公式

$$\sin(-a) = -\sin a$$

$$\cos(-a) = \cos a$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \cos a$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \sin a$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = \cos a$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = -\sin a$$

$$\sin(\pi - a) = \sin a$$

$$\cos(\pi - a) = -\cos a$$

$$\sin(\pi + a) = -\sin a$$

$$\cos(\pi + a) = -\cos a$$

$$\operatorname{tg} A = \tan A = \frac{\sin a}{\cos a}$$

### 万能公式

$$\sin a = \frac{2 \tan \frac{a}{2}}{1 + \left(\tan \frac{a}{2}\right)^2}$$

$$\cos a = \frac{1 - \left(\tan \frac{a}{2}\right)^2}{1 + \left(\tan \frac{a}{2}\right)^2}$$

$$\tan a = \frac{2 \tan \frac{a}{2}}{1 - (\tan \frac{a}{2})^2}$$

### 其它公式

$$a \cdot \sin a + b \cdot \cos a = \sqrt{(a^2 + b^2)} \times \sin(a+c) \text{ [其中 } \tan c = \frac{b}{a} \text{]}$$

$$a \cdot \sin(a) - b \cdot \cos(a) = \sqrt{(a^2 + b^2)} \times \cos(a-c) \text{ [其中 } \tan(c) = \frac{a}{b} \text{]}$$

$$1 + \sin(a) = (\sin \frac{a}{2} + \cos \frac{a}{2})^2$$

$$1 - \sin(a) = (\sin \frac{a}{2} - \cos \frac{a}{2})^2$$

### 其他非重点三角函数

$$\csc(a) = \frac{1}{\sin a}$$

$$\sec(a) = \frac{1}{\cos a}$$

### 双曲函数

$$\sinh(a) = \frac{e^a - e^{-a}}{2}$$

$$\cosh(a) = \frac{e^a + e^{-a}}{2}$$

$$\operatorname{tg} h(a) = \frac{\sinh(a)}{\cosh(a)}$$

### 公式一：

设  $\alpha$  为任意角，终边相同的角的同一三角函数的值相等：

$$\sin(2k\pi + \alpha) = \sin \alpha$$

$$\cos(2k\pi + \alpha) = \cos \alpha$$

$$\tan(2k\pi + \alpha) = \tan \alpha$$

$$\cot(2k\pi + \alpha) = \cot \alpha$$

### 公式二：

设  $\alpha$  为任意角， $\pi + \alpha$  的三角函数值与  $\alpha$  的三角函数值之间的关系：

$$\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha$$

$$\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\tan(\pi + \alpha) = \tan \alpha$$

$$\cot(\pi + \alpha) = \cot \alpha$$

### 公式三：

任意角  $\alpha$  与  $-\alpha$  的三角函数值之间的关系：

$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$$

$$\cos(-\alpha) = \cos \alpha$$

$$\tan(-\alpha) = -\tan\alpha$$

$$\cot(-\alpha) = -\cot\alpha$$

#### 公式四:

利用公式二和公式三可以得到  $\pi-\alpha$  与  $\alpha$  的三角函数值之间的关系:

$$\sin(\pi-\alpha) = \sin\alpha$$

$$\cos(\pi-\alpha) = -\cos\alpha$$

$$\tan(\pi-\alpha) = -\tan\alpha$$

$$\cot(\pi-\alpha) = -\cot\alpha$$

#### 公式五:

利用公式二和公式三可以得到  $2\pi-\alpha$  与  $\alpha$  的三角函数值之间的关系:

$$\sin(2\pi-\alpha) = -\sin\alpha$$

$$\cos(2\pi-\alpha) = \cos\alpha$$

$$\tan(2\pi-\alpha) = -\tan\alpha$$

$$\cot(2\pi-\alpha) = -\cot\alpha$$

#### 公式六:

$\frac{\pi}{2}\pm\alpha$  及  $\frac{3\pi}{2}\pm\alpha$  与  $\alpha$  的三角函数值之间的关系:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = \cos\alpha$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = -\sin\alpha$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = -\cot\alpha$$

$$\cot\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = -\tan\alpha$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \cos\alpha$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \sin\alpha$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \cot\alpha$$

$$\cot\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \tan\alpha$$

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right) = -\cos\alpha$$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right) = \sin\alpha$$

$$\tan\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right) = -\cot\alpha$$

$$\cot\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right) = -\tan\alpha$$

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right) = -\cos\alpha$$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\sin\alpha$$

$$\tan\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = \cot\alpha$$

$$\cot\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = \tan\alpha$$

(以上  $k \in \mathbb{Z}$ )

这个物理常用公式我费了半天的劲才输进来,希望对大家有用

$$A \cdot \sin(\omega t + \theta) + B \cdot \sin(\omega t + \varphi) = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB \cos(\theta \cdot \varphi)} \times$$

$$\sin \frac{\omega t + \arcsin[(A \sin \theta + B \sin \varphi)]}{\sqrt{A^2 + B^2 + 2AB \cos(\theta \cdot \varphi)}}$$

## 三角函数公式证明（全部）

公式表达式

乘法与因式分解  $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$   $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$   $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

三角不等式  $|a+b|\leq|a|+|b|$   $|a-b|\leq|a|+|b|$   $|a|\leq b\iff -b\leq a\leq b$

$|a-b|\geq|a|-|b|$   $-|a|\leq a\leq|a|$

一元二次方程的解  $-b+\sqrt{b^2-4ac}/2a$   $-b-\sqrt{b^2-4ac}/2a$

根与系数的关系  $X_1+X_2=-b/a$   $X_1*X_2=c/a$  注：韦达定理

判别式  $b^2-4a=0$  注：方程有相等的两实根

$b^2-4ac>0$  注：方程有一个实根

$b^2-4ac<0$  注：方程有共轭复数根

三角函数公式

两角和公式  $\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$   $\sin(A-B)=\sin A\cos B-\sin B\cos A$

$\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B$   $\cos(A-B)=\cos A\cos B+\sin A\sin B$

$\tan(A+B)=(\tan A+\tan B)/(1-\tan A\tan B)$   $\tan(A-B)=(\tan A-\tan B)/(1+\tan A\tan B)$

$\text{ctg}(A+B)=(\text{ctg}A\text{ctg}B-1)/(\text{ctg}B+\text{ctg}A)$   $\text{ctg}(A-B)=(\text{ctg}A\text{ctg}B+1)/(\text{ctg}B-\text{ctg}A)$

倍角公式  $\tan 2A=2\tan A/(1-\tan^2 A)$   $\text{ctg} 2A=(\text{ctg}^2 A-1)/2\text{ctg} A$

$\cos 2a=\cos^2 a-\sin^2 a=2\cos^2 a-1=1-2\sin^2 a$

半角公式  $\sin(A/2)=\sqrt{(1-\cos A)/2}$   $\sin(A/2)=-\sqrt{(1-\cos A)/2}$

$\cos(A/2)=\sqrt{(1+\cos A)/2}$   $\cos(A/2)=-\sqrt{(1+\cos A)/2}$

$\tan(A/2)=\sqrt{(1-\cos A)/(1+\cos A)}$   $\tan(A/2)=-\sqrt{(1-\cos A)/(1+\cos A)}$

$\text{ctg}(A/2)=\sqrt{(1+\cos A)/(1-\cos A)}$   $\text{ctg}(A/2)=-\sqrt{(1+\cos A)/(1-\cos A)}$

和差化积  $2\sin A\cos B=\sin(A+B)+\sin(A-B)$   $2\cos A\sin B=\sin(A+B)-\sin(A-B)$

$2\cos A\cos B=\cos(A+B)+\cos(A-B)$   $-2\sin A\sin B=\cos(A+B)-\cos(A-B)$

$$\sin A + \sin B = 2\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right) \quad \cos A + \cos B = 2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\sin\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

$$\tan A + \tan B = \frac{\sin(A+B)}{\cos A \cos B} \quad \tan A - \tan B = \frac{\sin(A-B)}{\cos A \cos B}$$

$$\operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} B = \frac{\sin(A+B)}{\sin A \sin B} \quad -\operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} B = \frac{\sin(A+B)}{\sin A \sin B}$$

某些数列前  $n$  项和  $1+2+3+4+5+6+7+8+9+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$

$$1+3+5+7+9+11+13+15+\dots+(2n-1) = n^2$$

$$2+4+6+8+10+12+14+\dots+(2n) = n(n+1)$$

$$12+22+32+42+52+62+72+82+\dots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$13+23+33+43+53+63+\dots+n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

$$1*2+2*3+3*4+4*5+5*6+6*7+\dots+n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

正弦定理  $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$  注：其中  $R$  表示三角形的外接圆半径

余弦定理  $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$  注：角  $B$  是边  $a$  和边  $c$  的夹角

正切定理:

$$\left[\frac{a+b}{a-b}\right] = \left\{\frac{[\operatorname{Tan}(a+b)/2]}{[\operatorname{Tan}(a-b)/2]}\right\}$$

圆的标准方程  $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$  注：(a,b) 是圆心坐标

圆的一般方程  $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$  注： $D^2 + E^2 - 4F > 0$

抛物线标准方程  $y^2 = 2px$   $y^2 = -2px$   $x^2 = 2py$   $x^2 = -2py$

直棱柱侧面积  $S = c * h$  斜棱柱侧面积  $S = c' * h$

正棱锥侧面积  $S = \frac{1}{2}c * h'$  正棱台侧面积  $S = \frac{1}{2}(c+c')h'$

圆台侧面积  $S = \frac{1}{2}(c+c')l = \pi(R+r)l$  球的表面积  $S = 4\pi * r^2$

圆柱侧面积  $S = c * h = 2\pi * r * h$  圆锥侧面积  $S = \frac{1}{2} * c * l = \pi * r * l$

弧长公式  $l = a * r$   $a$  是圆心角的弧度数  $r > 0$  扇形面积公式  $s = \frac{1}{2} * l * r$

锥体体积公式  $V = \frac{1}{3} * S * H$  圆锥体体积公式  $V = \frac{1}{3} * \pi * r^2 * h$

斜棱柱体积  $V = S * L$  注：其中,  $S'$  是直截面面积,  $L$  是侧棱长

柱体体积公式  $V = s * h$  圆柱体  $V = \pi * r^2 * h$

-----三角函数 积化和差 和差化积公式

记不住就自己推，用两角和差的正余弦：

$$\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B$$

$$\cos(A-B)=\cos A\cos B+\sin A\sin B$$

这两式相加或相减，可以得到 2 组积化和差：

$$\text{相加：}\cos A\cos B=[\cos(A+B)+\cos(A-B)]/2$$

$$\text{相减：}\sin A\sin B=-[\cos(A+B)-\cos(A-B)]/2$$

$$\sin(A+B)=\sin A\cos B+\sin B\cos A$$

$$\sin(A-B)=\sin A\cos B-\sin B\cos A$$

这两式相加或相减，可以得到 2 组积化和差：

$$\text{相加：}\sin A\cos B=[\sin(A+B)+\sin(A-B)]/2$$

$$\text{相减：}\sin B\cos A=[\sin(A+B)-\sin(A-B)]/2$$

这样一共 4 组积化和差，然后倒过来就是和差化积了

不知道这样你可以记住伐，实在记不住考试的时候也可以临时推导一下

正加正 正在前

正减正 余在前

余加余 都是余

余减余 没有余还负

正余正加 余正正减

余余余加 正正余减还负

.



3. 三角形中的一些结论：(不要求记忆)

$$(1) \tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C$$

$$(2) \sin A + \sin B + \sin C = 4 \cos(A/2) \cos(B/2) \cos(C/2)$$

$$(3) \cos A + \cos B + \cos C = 4 \sin(A/2) \sin(B/2) \sin(C/2) + 1$$

$$(4) \sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4 \sin A \sin B \sin C$$

$$(5) \cos 2A + \cos 2B + \cos 2C = -4 \cos A \cos B \cos C - 1$$

.....

已知  $\sin \alpha = m \sin(\alpha + 2\beta)$ ,  $|m| < 1$ , 求证  $\tan(\alpha + \beta) = (1+m)/(1-m) \tan \beta$

解:  $\sin \alpha = m \sin(\alpha + 2\beta)$

$$\sin(\alpha + \beta - \beta) = m \sin(\alpha + \beta + \beta)$$

$$\sin(\alpha + \beta) \cos \beta - \cos(\alpha + \beta) \sin \beta = m \sin(\alpha + \beta) \cos \beta + m \cos(\alpha + \beta) \sin \beta$$

$$\sin(\alpha + \beta) \cos \beta (1 - m) = \cos(\alpha + \beta) \sin \beta (m + 1)$$

$$\tan(\alpha + \beta) = (1+m)/(1-m) \tan \beta$$