微积分课程

第九章 · 微分方程与差分方程

2019 年 5 月 2 日

■ 暨南大学数学系 ■ 吕荐瑞

定义 1　含有未知函数的导数或微分的方程

$$F(x,y,y',y'',\cdots,y^{(n)})=0$$

称为微分方程.

定义 1 含有未知函数的导数或微分的方程

$$F(x, y, y', y'', \cdots, y^{(n)}) = 0$$

称为微分方程．其中出现的导数的最高阶数 n，称为微分方程的阶．

定义 1 含有未知函数的导数或微分的方程

$$F(x, y, y', y'', \cdots, y^{(n)}) = 0$$

称为微分方程. 其中出现的导数的最高阶数 n，称为微分方程的阶.

例子 判别下列微分方程的阶数：

(1) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + y = x$

(2) $x\,\mathrm{d}x - y^2\,\mathrm{d}y = 0$

(3) $y'' + y' = \mathrm{e}^x$

例 1　求解一阶微分方程 $\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2x \\ y\big|_{x=1} = 3 \end{cases}$

例 1　求解一阶微分方程 $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = 2x \\ y|_{x=1} = 3 \end{cases}$

解答　对方程两边积分，得到

$y = x^2 + C$（C 为任意常数）

例 1　求解一阶微分方程 $\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2x \\ y\big|_{x=1} = 3 \end{cases}$

解答　对方程两边积分，得到

$$y = x^2 + C（C \text{ 为任意常数}）$$

将 $x = 1$ 时 $y = 3$ 代入上式，得到 $C = 2$.

例 1　求解一阶微分方程 $\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2x \\ y\big|_{x=1} = 3 \end{cases}$

解答　对方程两边积分，得到

$$y = x^2 + C\text{（}C\text{ 为任意常数）}$$

将 $x = 1$ 时 $y = 3$ 代入上式，得到 $C = 2$. 因此

$$y = x^2 + 2$$

例 1　求解一阶微分方程 $\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2x \\ y\big|_{x=1} = 3 \end{cases}$

解答　对方程两边积分，得到

$y = x^2 + C$（C 为任意常数）. . . . . 通解

将 $x = 1$ 时 $y = 3$ 代入上式，得到 $C = 2$．因此

$$y = x^2 + 2$$

例 1　求解一阶微分方程 $\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2x \\ y\big|_{x=1} = 3 \quad \cdots\cdots \text{初始条件} \end{cases}$

解答　对方程两边积分，得到

$$y = x^2 + C\text{（}C\text{ 为任意常数）} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{通解}$$

将 $x = 1$ 时 $y = 3$ 代入上式，得到 $C = 2$．因此

$$y = x^2 + 2$$

例 1 求解一阶微分方程 $\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2x \\ y\big|_{x=1} = 3 \cdots\cdots \text{初始条件} \end{cases}$

解答 对方程两边积分，得到

$$y = x^2 + C\text{（}C\text{ 为任意常数）} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{通解}$$

将 $x = 1$ 时 $y = 3$ 代入上式，得到 $C = 2$．因此

$$y = x^2 + 2 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{特解}$$

例 2　求解二阶微分方程 $\begin{cases} y'' = -1, \\ y\big|_{x=0} = 0,\ y'\big|_{x=0} = 1. \end{cases}$

例 2　求解二阶微分方程 $\begin{cases} y'' = -1, \\ y\big|_{x=0} = 0,\ y'\big|_{x=0} = 1. \end{cases}$

解答　对方程两边积分，得到

① $y' = -x + C_1$（C_1 为常数）

例 2　求解二阶微分方程 $\begin{cases} y'' = -1, \\ y\big|_{x=0} = 0,\ y'\big|_{x=0} = 1. \end{cases}$

解答　对方程两边积分，得到

① $y' = -x + C_1$（C_1 为常数）

再对前式两边积分，得到

② $y = -\frac{1}{2}x^2 + C_1x + C_2$（$C_1, C_2$ 为常数）

例 2　求解二阶微分方程 $\begin{cases} y'' = -1, \\ y\big|_{x=0} = 0,\ y'\big|_{x=0} = 1. \end{cases}$

解答　对方程两边积分，得到

① $y' = -x + C_1$（C_1 为常数）

再对前式两边积分，得到

② $y = -\frac{1}{2}x^2 + C_1x + C_2$（$C_1, C_2$ 为常数）$\cdots$ 通解

例 2 求解二阶微分方程 $\begin{cases} y'' = -1, \\ y\big|_{x=0} = 0,\ y'\big|_{x=0} = 1. \end{cases}$

解答 对方程两边积分，得到

① $y' = -x + C_1$（C_1 为常数）

再对前式两边积分，得到

② $y = -\frac{1}{2}x^2 + C_1 x + C_2$（$C_1, C_2$ 为常数）$\cdots$ 通解

将初始条件 $y'|_{x=0} = 1$ 代入 ①，得到 $C_1 = 1$.

例 2　求解二阶微分方程 $\begin{cases} y'' = -1, \\ y\big|_{x=0} = 0,\ y'\big|_{x=0} = 1. \end{cases}$

解答　对方程两边积分，得到

① $y' = -x + C_1$（C_1 为常数）

再对前式两边积分，得到

② $y = -\dfrac{1}{2}x^2 + C_1 x + C_2$（$C_1, C_2$ 为常数）$\cdots$ 通解

将初始条件 $y'|_{x=0} = 1$ 代入 ①，得到 $C_1 = 1$.

将初始条件 $y|_{x=0} = 0$ 代入 ②，得到 $C_2 = 0$.

例 2　求解二阶微分方程 $\begin{cases} y'' = -1, \\ y\big|_{x=0} = 0,\ y'\big|_{x=0} = 1. \end{cases}$

解答　对方程两边积分，得到

① $y' = -x + C_1$（C_1 为常数）

再对前式两边积分，得到

② $y = -\dfrac{1}{2}x^2 + C_1 x + C_2$（$C_1, C_2$ 为常数）$\cdots$ 通解

将初始条件 $y'|_{x=0} = 1$ 代入 ①，得到 $C_1 = 1$.

将初始条件 $y|_{x=0} = 0$ 代入 ②，得到 $C_2 = 0$．因此

例 2 求解二阶微分方程 $\begin{cases} y'' = -1, \\ y\big|_{x=0} = 0, \ y'\big|_{x=0} = 1. \end{cases}$

解答 对方程两边积分，得到

① $y' = -x + C_1$（C_1 为常数）

再对前式两边积分，得到

② $y = -\frac{1}{2}x^2 + C_1 x + C_2$（$C_1, C_2$ 为常数）$\cdots$ 通解

将初始条件 $y'|_{x=0} = 1$ 代入 ①，得到 $C_1 = 1$.

将初始条件 $y|_{x=0} = 0$ 代入 ②，得到 $C_2 = 0$. 因此

$$y = -\frac{1}{2}x^2 + x$$

例 2 求解二阶微分方程 $\begin{cases} y'' = -1, \\ y\big|_{x=0} = 0, \; y'\big|_{x=0} = 1. \end{cases}$

解答 对方程两边积分，得到

① $y' = -x + C_1$（C_1 为常数）

再对前式两边积分，得到

② $y = -\dfrac{1}{2}x^2 + C_1 x + C_2$（$C_1, C_2$ 为常数）$\cdots$ 通解

将初始条件 $y'|_{x=0} = 1$ 代入 ①，得到 $C_1 = 1$.

将初始条件 $y|_{x=0} = 0$ 代入 ②，得到 $C_2 = 0$．因此

$$y = -\frac{1}{2}x^2 + x \;\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{特解}$$

第一节	微分方程的一般概念
第二节	一阶微分方程
第三节	二阶微分方程*
第四节	差分方程的一般概念
第五节	一阶常系数线性差分方程
第六节	二阶常系数线性差分方程*

一阶微分方程

一阶微分方程的一般形式为 $F(x,y,y')=0$. 对应的初始条件为 $y|_{x=x_0}=y_0$.

一阶微分方程

一阶微分方程的一般形式为 $F(x, y, y') = 0$．对应的初始条件为 $y|_{x=x_0} = y_0$.

在这一节中，我们将研究 3 种一阶微分方程：

一阶微分方程

一阶微分方程的一般形式为 $F(x,y,y')=0$．对应的初始条件为 $y|_{x=x_0}=y_0$．

在这一节中，我们将研究 3 种一阶微分方程：

1 可分离变量微分方程

一阶微分方程

一阶微分方程的一般形式为 $F(x, y, y') = 0$．对应的初始条件为 $y|_{x=x_0} = y_0$．

在这一节中，我们将研究 3 种一阶微分方程：

1. 可分离变量微分方程
2. 齐次微分方程

一阶微分方程

一阶微分方程的一般形式为 $F(x, y, y') = 0$. 对应的初始条件为 $y|_{x=x_0} = y_0$.

在这一节中，我们将研究 3 种一阶微分方程：

1. 可分离变量微分方程
2. 齐次微分方程
3. 一阶线性微分方程

第二节	一阶微分方程
2.1	可分离变量微分方程
2.2	齐次微分方程
2.3	一阶线性微分方程

㈠ 可分离变量微分方程

形如 $f(y)\,\mathrm{d}y = g(x)\,\mathrm{d}x$ 的方程称为可分离变量微分方程.

㈠ 可分离变量微分方程

形如 $f(y)\,\mathrm{d}y = g(x)\,\mathrm{d}x$ 的方程称为可分离变量微分方程.

对这种方程的两边同时积分，就可以求出它的通解.

可分离变量微分方程

例 1　求微分方程 $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{y}{x}$ 的通解.

可分离变量微分方程

例 1　求微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{y}{x}$ 的通解.

练习 1　求微分方程 $(1+y)\,\mathrm{d}x - (1-x)\,\mathrm{d}y = 0$ 的通解.

可分离变量微分方程

例 2　求微分方程 $y' = -\dfrac{x}{y}$ 在初始条件 $y|_{x=0} = 1$ 下的特解.

可分离变量微分方程

例 2　求微分方程 $y' = -\frac{x}{y}$ 在初始条件 $y|_{x=0} = 1$ 下的特解.

练习 2　求微分方程 $\frac{x}{1+y}\mathrm{d}x - \frac{y}{1+x}\mathrm{d}y = 0$ 满足初始条件 $y|_{x=0} = 1$ 的特解.

可分离变量微分方程

例 3　求微分方程 $y' = 2xy^2$ 的通解，以及在初始条件 $y\big|_{x=0} = -1$ 下的特解.

可分离变量微分方程

例 3　求微分方程 $y' = 2xy^2$ 的通解，以及在初始条件 $y\big|_{x=0} = -1$ 下的特解.

解答　通解为 $y = -\dfrac{1}{x^2 + C}$.

可分离变量微分方程

例 3 求微分方程 $y' = 2xy^2$ 的通解，以及在初始条件 $y\big|_{x=0} = -1$ 下的特解.

解答 通解为 $y = -\dfrac{1}{x^2 + C}$.

注记 通解 $\neq$ 全部解.

第二节	一阶微分方程
2.1	可分离变量微分方程
2.2	齐次微分方程
2.3	一阶线性微分方程

㈡ 齐次微分方程

形如

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f\left(\frac{y}{x}\right)$$

的微分方程称为齐次微分方程.

㈡ 齐次微分方程

形如

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f\left(\frac{y}{x}\right)$$

的微分方程称为齐次微分方程.

例如:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{x-2y}{x+y}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y^2}{xy-x^2}$$

齐次微分方程的解法

1 标准化：将微分方程化为 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(\frac{y}{x})$

齐次微分方程的解法

1 标准化：将微分方程化为 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(\frac{y}{x})$

2 换元：令 $v = \frac{y}{x}$，

齐次微分方程的解法

1. 标准化：将微分方程化为 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(\frac{y}{x})$
2. 换元：令 $v = \frac{y}{x}$，则有 $y = xv$，

齐次微分方程的解法

1. 标准化：将微分方程化为 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(\frac{y}{x})$
2. 换元：令 $v = \frac{y}{x}$，则有 $y = xv$，从而
$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + v$.

齐次微分方程的解法

1 标准化：将微分方程化为 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(\frac{y}{x})$

2 换元：令 $v = \frac{y}{x}$，则有 $y = xv$，从而 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + v$．代入原方程得到

$$x\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + v = f(v)$$

齐次微分方程的解法

1 标准化：将微分方程化为 $\frac{dy}{dx}=f(\frac{y}{x})$

2 换元：令 $v=\frac{y}{x}$，则有 $y=xv$，从而 $\frac{dy}{dx}=x\frac{dv}{dx}+v$．代入原方程得到

$$x\frac{dv}{dx}+v=f(v)$$

3 分离变量：得到 $\dfrac{dv}{f(v)-v}=\dfrac{dx}{x}$

齐次微分方程的解法

1 标准化：将微分方程化为 $\frac{dy}{dx} = f(\frac{y}{x})$

2 换元：令 $v = \frac{y}{x}$，则有 $y = xv$，从而

$\frac{dy}{dx} = x\frac{dv}{dx} + v$. 代入原方程得到

$$x\frac{dv}{dx} + v = f(v)$$

3 分离变量：得到 $$\frac{dv}{f(v) - v} = \frac{dx}{x}$$

4 两边积分：得到通解，然后将 v 代回

齐次微分方程

例 4 求 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y^2}{xy-x^2}$ 的通解.

齐次微分方程

例 4　求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{y^2}{xy-x^2}$ 的通解.

练习 3　求微分方程 $y'=\dfrac{y+x}{x}$ 的通解.

例 5 求微分方程 $\left(x\tan\frac{y}{x}+y\right)\mathrm{d}x = x\,\mathrm{d}y$ 在初始条件 $y|_{x=2}=\pi$ 下的特解.

例 5　求微分方程 $\left(x\tan\frac{y}{x}+y\right)\mathrm{d}x = x\,\mathrm{d}y$ 在初始条件 $y|_{x=2}=\pi$ 下的特解.

解答　方程即为 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\tan\frac{y}{x}+\frac{y}{x}$.

例 5　求微分方程 $\left(x\tan\frac{y}{x}+y\right)\mathrm{d}x = x\,\mathrm{d}y$ 在初始条件 $y|_{x=2}=\pi$ 下的特解.

解答　方程即为 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\tan\frac{y}{x}+\frac{y}{x}$.

- 令 $v=\frac{y}{x}$，得到 $x\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}+v=\tan v+v$.

例 5　求微分方程 $\left(x\tan\frac{y}{x}+y\right)\mathrm{d}x = x\,\mathrm{d}y$ 在初始条件 $y|_{x=2}=\pi$ 下的特解.

解答　方程即为 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \tan\frac{y}{x}+\frac{y}{x}$.

- 令 $v=\frac{y}{x}$，得到 $x\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}+v=\tan v+v$.
- 分离变量，得到 $\cot v\,\mathrm{d}v=\frac{\mathrm{d}x}{x}$.

例 5　求微分方程 $\left(x\tan\frac{y}{x}+y\right)\mathrm{d}x = x\,\mathrm{d}y$ 在初始条件 $y|_{x=2}=\pi$ 下的特解.

解答　方程即为 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\tan\frac{y}{x}+\frac{y}{x}$.

- 令 $v=\frac{y}{x}$，得到 $x\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}+v=\tan v+v$.
- 分离变量，得到 $\cot v\,\mathrm{d}v=\frac{\mathrm{d}x}{x}$.
- 两边积分，得到 $\ln|\sin v|=\ln|x|+C_0$.

例 5　求微分方程 $\left(x\tan\dfrac{y}{x}+y\right)\mathrm{d}x=x\,\mathrm{d}y$ 在初始条件 $y|_{x=2}=\pi$ 下的特解.

解答　方程即为 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\tan\dfrac{y}{x}+\dfrac{y}{x}$.

- 令 $v=\dfrac{y}{x}$，得到 $x\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}+v=\tan v+v$.
- 分离变量，得到 $\cot v\,\mathrm{d}v=\dfrac{\mathrm{d}x}{x}$.
- 两边积分，得到 $\ln|\sin v|=\ln|x|+C_0$.
- 整理等式，得到 $\sin v=Cx$，即 $\sin\dfrac{y}{x}=Cx$.

例 5 求微分方程 $\left(x\tan\frac{y}{x}+y\right)\mathrm{d}x = x\,\mathrm{d}y$ 在初始条件 $y|_{x=2}=\pi$ 下的特解.

解答 方程即为 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\tan\frac{y}{x}+\frac{y}{x}$.

- 令 $v=\frac{y}{x}$，得到 $x\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}+v=\tan v+v$.
- 分离变量，得到 $\cot v\,\mathrm{d}v=\frac{\mathrm{d}x}{x}$.
- 两边积分，得到 $\ln|\sin v|=\ln|x|+C_0$.
- 整理等式，得到 $\sin v = Cx$，即 $\sin\frac{y}{x}=Cx$.

代入初始条件，得到 $C=\frac{1}{2}$，故特解为 $\sin\frac{y}{x}=\frac{1}{2}x$.

练习 4　求微分方程 $(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x - xy\,\mathrm{d}y = 0$ 在初始条件 $y|_{x=1}=0$ 下的特解.

第二节	一阶微分方程
2.1	可分离变量微分方程
2.2	齐次微分方程
2.3	一阶线性微分方程

㈢ 一阶线性微分方程

一阶线性微分方程 $y' + p(x)y = q(x)$.

㈢ 一阶线性微分方程

一阶线性微分方程 $y' + p(x)y = q(x)$.

- 若 $q(x) \equiv 0$，称为一阶线性齐次微分方程
- 若 $q(x) \not\equiv 0$，称为一阶线性非齐次微分方程

㈢ 一阶线性微分方程

一阶线性微分方程 $y' + p(x)y = q(x)$.

- 若 $q(x) \equiv 0$，称为一阶线性齐次微分方程
- 若 $q(x) \not\equiv 0$，称为一阶线性非齐次微分方程

....

(1) $y' + xy = x^2$ ✓

㈢ 一阶线性微分方程

一阶线性微分方程 $y' + p(x)y = q(x)$.

- 若 $q(x) \equiv 0$，称为一阶线性齐次微分方程
- 若 $q(x) \not\equiv 0$，称为一阶线性非齐次微分方程

. . . .

(1) $y' + xy = x^2$ ✓

(2) $y' + y^2 = \sin x$ ✗

㈢ 一阶线性微分方程

一阶线性微分方程 $y' + p(x)y = q(x)$.

- 若 $q(x) \equiv 0$，称为一阶线性齐次微分方程
- 若 $q(x) \not\equiv 0$，称为一阶线性非齐次微分方程

. . . .

(1) $y' + xy = x^2$ ✓

(2) $y' + y^2 = \sin x$ ✗

(3) $yy' + xy = 1$ ✗

一阶线性齐次微分方程

先看一阶线性齐次微分方程 $y' + p(x)y = 0$.

一阶线性齐次微分方程

先看一阶线性齐次微分方程 $y' + p(x)y = 0$.

. . . .

分离变量得到

$$\frac{\mathrm{d}y}{y} = -p(x)\,\mathrm{d}x$$

一阶线性齐次微分方程

先看一阶线性齐次微分方程 $y' + p(x)y = 0$.

. . . .

分离变量得到

$$\frac{\mathrm{d}y}{y} = -p(x)\,\mathrm{d}x$$

两边同时积分，得到

$$\ln|y| = -\int p(x)\,\mathrm{d}x + C_0$$

一阶线性齐次微分方程

先看一阶线性齐次微分方程 $y' + p(x)y = 0$.

分离变量得到

$$\frac{\mathrm{d}y}{y} = -p(x)\,\mathrm{d}x$$

两边同时积分，得到

$$\ln|y| = -\int p(x)\,\mathrm{d}x + C_0$$

消去对数，得到通解为（其中 $C = \pm e^{C_0}$）

$$y = Ce^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x}$$

一阶线性非齐次微分方程

再看一阶线性非齐次微分方程 $y' + p(x)y = q(x)$.

一阶线性非齐次微分方程

再看一阶线性非齐次微分方程 $y' + p(x)y = q(x)$.

. . . .

例 6　求微分方程 $y' + \frac{1}{x}y = 1$ 的通解.

一阶线性非齐次微分方程

再看一阶线性非齐次微分方程 $y' + p(x)y = q(x)$.

例 6　求微分方程 $y' + \frac{1}{x}y = 1$ 的通解.

1 恒等变形：$xy' + y = x$

一阶线性非齐次微分方程

再看一阶线性非齐次微分方程 $y' + p(x)y = q(x)$.

例 6　求微分方程 $y' + \frac{1}{x}y = 1$ 的通解.

1 恒等变形：$xy' + y = x$

2 合并左边：$(xy)' = x$

一阶线性非齐次微分方程

再看一阶线性非齐次微分方程 $y' + p(x)y = q(x)$.

例 6　求微分方程 $y' + \frac{1}{x}y = 1$ 的通解.

1 恒等变形：$xy' + y = x$

2 合并左边：$(xy)' = x$

3 两边积分：$xy = \frac{1}{2}x^2 + C$

一阶线性非齐次微分方程

再看一阶线性非齐次微分方程 $y' + p(x)y = q(x)$.

. . . .

例 6　求微分方程 $y' + \frac{1}{x}y = 1$ 的通解.

1 恒等变形：$xy' + y = x$

2 合并左边：$(xy)' = x$

3 两边积分：$xy = \frac{1}{2}x^2 + C$

4 得到通解：$y = \frac{1}{2}x + C\frac{1}{x}$

一阶线性非齐次微分方程

再看一阶线性非齐次微分方程 $y' + p(x)y = q(x)$.

一阶线性非齐次微分方程

再看一阶线性非齐次微分方程 $y' + p(x)y = q(x)$.

. . . .

例 7　求微分方程 $y' - \frac{1}{x}y = x^2$ 的通解.

一阶线性非齐次微分方程

再看一阶线性非齐次微分方程 $y' + p(x)y = q(x)$.

. . . .

例 7　求微分方程 $y' - \frac{1}{x}y = x^2$ 的通解.

1 恒等变形：$\frac{1}{x}y' - \frac{1}{x^2}y = x$

一阶线性非齐次微分方程

再看一阶线性非齐次微分方程 $y' + p(x)y = q(x)$.

. . . .

例 7　求微分方程 $y' - \frac{1}{x}y = x^2$ 的通解.

1 恒等变形：$\frac{1}{x}y' - \frac{1}{x^2}y = x$

2 合并左边：$\left(\frac{1}{x}y\right)' = x$

一阶线性非齐次微分方程

再看一阶线性非齐次微分方程 $y' + p(x)y = q(x)$.

例 7　求微分方程 $y' - \frac{1}{x}y = x^2$ 的通解.

1 恒等变形：$\frac{1}{x}y' - \frac{1}{x^2}y = x$

2 合并左边：$\left(\frac{1}{x}y\right)' = x$

3 两边积分：$\frac{1}{x}y = \frac{1}{2}x^2 + C$

一阶线性非齐次微分方程

再看一阶线性非齐次微分方程 $y' + p(x)y = q(x)$.

例 7　求微分方程 $y' - \frac{1}{x}y = x^2$ 的通解.

1 恒等变形：$\frac{1}{x}y' - \frac{1}{x^2}y = x$

2 合并左边：$\left(\frac{1}{x}y\right)' = x$

3 两边积分：$\frac{1}{x}y = \frac{1}{2}x^2 + C$

4 得到通解：$y = \frac{1}{2}x^3 + Cx$

一阶线性非齐次微分方程

再看一阶线性非齐次微分方程 $y' + p(x)y = q(x)$.

一阶线性非齐次微分方程

再看一阶线性非齐次微分方程 $y' + p(x)y = q(x)$.

. . . .

例 8　求微分方程 $y' + y = 1$ 的通解.

一阶线性非齐次微分方程

再看一阶线性非齐次微分方程 $y' + p(x)y = q(x)$.

. . . .

例 8　求微分方程 $y' + y = 1$ 的通解.

1 恒等变形：$e^x y' + e^x y = e^x$

一阶线性非齐次微分方程

再看一阶线性非齐次微分方程 $y' + p(x)y = q(x)$.

…………………………………………

例 8　求微分方程 $y' + y = 1$ 的通解.

1 恒等变形：$e^x y' + e^x y = e^x$

2 合并左边：$(e^x y)' = e^x$

一阶线性非齐次微分方程

再看一阶线性非齐次微分方程 $y' + p(x)y = q(x)$.

例 8　求微分方程 $y' + y = 1$ 的通解.

1 恒等变形：$e^x y' + e^x y = e^x$

2 合并左边：$(e^x y)' = e^x$

3 两边积分：$e^x y = e^x + C$

一阶线性非齐次微分方程

再看一阶线性非齐次微分方程 $y' + p(x)y = q(x)$.

. . . .

例 8　求微分方程 $y' + y = 1$ 的通解.

1 恒等变形：$e^x y' + e^x y = e^x$

2 合并左边：$(e^x y)' = e^x$

3 两边积分：$e^x y = e^x + C$

4 得到通解：$y = 1 + Ce^{-x}$

积分因子法

再看一阶线性非齐次微分方程 $y' + p(x)y = q(x)$.

积分因子法

再看一阶线性非齐次微分方程 $y' + p(x)y = q(x)$.

……………………………………………

1 恒等变形：$v(x)y' + p(x)v(x)y = q(x)v(x)$

积分因子法

再看一阶线性非齐次微分方程 $y' + p(x)y = q(x)$.

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

1 恒等变形：$v(x)y' + p(x)v(x)y = q(x)v(x)$

2 合并左边：$\big(v(x)y\big)' = q(x)v(x)$

积分因子法

再看一阶线性非齐次微分方程 $y' + p(x)y = q(x)$.

1 恒等变形：$v(x)y' + p(x)v(x)y = q(x)v(x)$

2 合并左边：$\big(v(x)y\big)' = q(x)v(x)$

3 两边积分：$v(x)y = \int q(x)v(x)\,\mathrm{d}x + C$

积分因子法

再看一阶线性非齐次微分方程 $y' + p(x)y = q(x)$.

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

1 恒等变形：$v(x)y' + p(x)v(x)y = q(x)v(x)$

2 合并左边：$\big(v(x)y\big)' = q(x)v(x)$

3 两边积分：$v(x)y = \int q(x)v(x)\,\mathrm{d}x + C$

4 得到通解：$y = \frac{1}{v(x)}\left(\int q(x)v(x)\,\mathrm{d}x + C\right)$

积分因子法

再看一阶线性非齐次微分方程 $y' + p(x)y = q(x)$.

. . . .

1 恒等变形：$v(x)y' + p(x)v(x)y = q(x)v(x)$

2 合并左边：$\big(v(x)y\big)' = q(x)v(x)$

3 两边积分：$v(x)y = \int q(x)v(x)\,\mathrm{d}x + C$

4 得到通解：$y = \frac{1}{v(x)}\left(\int q(x)v(x)\,\mathrm{d}x + C\right)$

问题　积分因子 $v(x)$ 是否一定存在？如何求出它？

积分因子法

问题 寻找 $v = v(x)$ 使得 $v\,y' + p(x)\,v\,y = (v\,y)'$.

积分因子法

问题　寻找 $v = v(x)$ 使得 $vy' + p(x)vy = (vy)'$.

解答　展开等式右边得 $vy' + p(x)vy = vy' + v'y$.

积分因子法

问题　寻找 $v = v(x)$ 使得 $vy' + p(x)vy = (vy)'$.

解答　展开等式右边得 $vy' + p(x)vy = vy' + v'y$.

- 化简条件：$p(x)v = v'$,

积分因子法

问题　寻找 $v = v(x)$ 使得 $v y' + p(x) v y = (v y)'$.

解答　展开等式右边得 $v y' + p(x) v y = v y' + v' y$.

- 化简条件：$p(x) v = v'$，即 $p(x) v = \dfrac{dv}{dx}$

积分因子法

问题　寻找 $v=v(x)$ 使得 $v\,y'+p(x)\,v\,y=(v\,y)'$.

解答　展开等式右边得 $v\,y'+p(x)\,v\,y=v\,y'+v'\,y$.

- 化简条件：$p(x)\,v=v'$，即 $p(x)\,v=\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$
- 分离变量：$\dfrac{\mathrm{d}v}{v}=p(x)$

积分因子法

问题　寻找 $v = v(x)$ 使得 $v\,y' + p(x)\,v\,y = (v\,y)'$.

解答　展开等式右边得 $v\,y' + p(x)\,v\,y = v\,y' + v'\,y$.

- 化简条件：$p(x)\,v = v'$，即 $p(x)\,v = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$
- 分离变量：$\dfrac{\mathrm{d}v}{v} = p(x)$
- 求解方程：$\ln v = \int p(x)\,\mathrm{d}x$，即 $v = \mathrm{e}^{\int p(x)\,\mathrm{d}x}$

一阶线性微分方程的通解

对一阶线性非齐次微分方程

$$y' + p(x)y = q(x)$$

一阶线性微分方程的通解

对一阶线性非齐次微分方程

$$y' + p(x)y = q(x)$$

令积分因子为

$$v(x) = \mathrm{e}^{\int p(x)\,\mathrm{d}x}$$

一阶线性微分方程的通解

对一阶线性非齐次微分方程

$$y' + p(x)y = q(x)$$

令积分因子为

$$v(x) = \mathrm{e}^{\int p(x)\,\mathrm{d}x}$$

则方程的通解为

$$y = \frac{1}{v(x)}\left(\int q(x)v(x)\,\mathrm{d}x + C\right)$$

例 9　求 $y' - \frac{2}{x+1}y = (x+1)^3$ 的通解.

例 9 求 $y' - \dfrac{2}{x+1}y = (x+1)^3$ 的通解.

练习 5 求 $y' + y = \mathrm{e}^{-x}$ 的通解.

复习 1　求方程 $xy\,\mathrm{d}x + \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}y = 0$ 的通解.

复习 2　求微分方程 $(x+y)\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y = 0$ 的通解.

复习3　求一阶微分方程 $xy' + y = 3x^2$ 在初始条件 $y|_{x=1} = 0$ 下的特解.

复习3 求一阶微分方程 $xy' + y = 3x^2$ 在初始条件 $y|_{x=1} = 0$ 下的特解.

解答 通解 $y = \frac{1}{x}\left(x^3 + C\right)$，特解 $y = \frac{1}{x}\left(x^3 - 1\right)$.

一阶微分方程

例 10　求微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{x + y}$.

一阶微分方程

例 10　求微分方程 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{x+y}$.

注记　$\dfrac{dx}{dy} + p(y)x = q(y)$ 也是一阶线性微分方程.

第一节 微分方程的一般概念

第二节 一阶微分方程

第三节 二阶微分方程*

第四节 差分方程的一般概念

第五节 一阶常系数线性差分方程

第六节 二阶常系数线性差分方程*

第三节	二阶微分方程*
3.1	可降阶的二阶微分方程
3.2	二阶常系数线性微分方程

㈠ $y'' = f(x)$ 型

例 1　求 $y'' = \mathrm{e}^{2x}$ 的通解.

㈡ $y'' = f(x, y')$ 型

例 2　求 $y'' = \frac{1}{x} y'$ 的通解.

㈡ $y'' = f(x, y')$ 型

例 2　求 $y'' = \frac{1}{x} y'$ 的通解.

练习 1　求 $xy'' + y' = 0$ 的通解.

㈢ $y'' = f(y, y')$ 型

例 3　求 $y'' = \frac{3}{2}y^2$ 在初始条件 $y|_{x=3} = 1$，$y'|_{x=3} = 1$ 下的特解.

㈢ $y'' = f(y, y')$ 型

例 3　求 $y'' = \frac{3}{2}y^2$ 在初始条件 $y|_{x=3} = 1$，$y'|_{x=3} = 1$ 下的特解.

练习 2　求 $y'' = 3\sqrt{y}$ 满足初始条件 $y|_{x=0} = 1$，$y'|_{x=0} = 2$ 的特解.

第三节	二阶微分方程*
3.1	可降阶的二阶微分方程
3.2	二阶常系数线性微分方程

二阶常系数齐次线性方程

研究二阶常系数齐次线性方程：$y'' + py' + qy = 0$

二阶常系数齐次线性方程

研究二阶常系数齐次线性方程：$y'' + py' + qy = 0$

例 4　求微分方程 $y'' + 4y' + 3y = 0$ 的通解.

二阶常系数齐次线性方程

研究二阶常系数齐次线性方程：$y'' + py' + qy = 0$

例 4　求微分方程 $y'' + 4y' + 3y = 0$ 的通解.

1 恒等变形：得 $(y'' + y') + 3(y' + y) = 0$

二阶常系数齐次线性方程

研究二阶常系数齐次线性方程：$y'' + py' + qy = 0$

…………………………………………

例 4　求微分方程 $y'' + 4y' + 3y = 0$ 的通解.

1 恒等变形：得 $(y'' + y') + 3(y' + y) = 0$

2 变量代换：令 $z = y' + y$，则 $z' + 3z = 0$

二阶常系数齐次线性方程

研究二阶常系数齐次线性方程：$y'' + py' + qy = 0$

…………………………………………

例 4　求微分方程 $y'' + 4y' + 3y = 0$ 的通解.

1 恒等变形：得 $(y'' + y') + 3(y' + y) = 0$

2 变量代换：令 $z = y' + y$，则 $z' + 3z = 0$

3 求解方程：得 $z = Ce^{-3x}$，即 $y' + y = Ce^{-3x}$

二阶常系数齐次线性方程

研究二阶常系数齐次线性方程：$y'' + py' + qy = 0$

例 4　求微分方程 $y'' + 4y' + 3y = 0$ 的通解.

1 恒等变形：得 $(y'' + y') + 3(y' + y) = 0$

2 变量代换：令 $z = y' + y$，则 $z' + 3z = 0$

3 求解方程：得 $z = Ce^{-3x}$，即 $y' + y = Ce^{-3x}$

4 求解方程：得 $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-3x}$

二阶常系数齐次线性方程

研究二阶常系数齐次线性方程：$y'' + py' + qy = 0$

二阶常系数齐次线性方程

研究二阶常系数齐次线性方程：$y'' + py' + qy = 0$

例 5　求微分方程 $y'' + 4y' + 4y = 0$ 的通解.

二阶常系数齐次线性方程

研究二阶常系数齐次线性方程：$y'' + py' + qy = 0$

……………………………………

例 5　求微分方程 $y'' + 4y' + 4y = 0$ 的通解.

1 恒等变形：得 $(y'' + 2y') + 2(y' + 2y) = 0$

二阶常系数齐次线性方程

研究二阶常系数齐次线性方程：$y'' + py' + qy = 0$

例 5　求微分方程 $y'' + 4y' + 4y = 0$ 的通解.

1 恒等变形：得 $(y'' + 2y') + 2(y' + 2y) = 0$

2 变量代换：令 $z = y' + 2y$，则 $z' + 2z = 0$

二阶常系数齐次线性方程

研究二阶常系数齐次线性方程：$y'' + py' + qy = 0$

…………………………………………

例 5　求微分方程 $y'' + 4y' + 4y = 0$ 的通解.

1 恒等变形：得 $(y'' + 2y') + 2(y' + 2y) = 0$

2 变量代换：令 $z = y' + 2y$，则 $z' + 2z = 0$

3 求解方程：得 $z = Ce^{-2x}$，即 $y' + 2y = Ce^{-2x}$

二阶常系数齐次线性方程

研究二阶常系数齐次线性方程：$y'' + py' + qy = 0$

例 5　求微分方程 $y'' + 4y' + 4y = 0$ 的通解.

1 恒等变形：得 $(y'' + 2y') + 2(y' + 2y) = 0$

2 变量代换：令 $z = y' + 2y$，则 $z' + 2z = 0$

3 求解方程：得 $z = Ce^{-2x}$，即 $y' + 2y = Ce^{-2x}$

4 求解方程：得 $y = (C_1 + C_2 x)\,\mathrm{e}^{-2x}$

二阶常系数齐次线性方程

研究二阶常系数齐次线性方程：$y'' + py' + qy = 0$

二阶常系数齐次线性方程

研究二阶常系数齐次线性方程：$y'' + py' + qy = 0$

1 恒等变形：得 $(y'' - ay') - b(y' - ay) = 0$

二阶常系数齐次线性方程

研究二阶常系数齐次线性方程：$y'' + py' + qy = 0$

1 恒等变形：得 $(y'' - ay') - b(y' - ay) = 0$

2 变量代换：令 $z = y' - ay$，则 $z' - bz = 0$

二阶常系数齐次线性方程

研究二阶常系数齐次线性方程：$y'' + py' + qy = 0$

1. 恒等变形：得 $(y'' - ay') - b(y' - ay) = 0$
2. 变量代换：令 $z = y' - ay$，则 $z' - bz = 0$
3. 求解方程：得 $z = Ce^{bx}$，即 $y' - ay = Ce^{bx}$

二阶常系数齐次线性方程

研究二阶常系数齐次线性方程：$y'' + py' + qy = 0$

1 恒等变形：得 $(y'' - ay') - b(y' - ay) = 0$

2 变量代换：令 $z = y' - ay$，则 $z' - bz = 0$

3 求解方程：得 $z = Ce^{bx}$，即 $y' - ay = Ce^{bx}$

4 求解方程：得 $y = \mathrm{e}^{ax}\left(\int Ce^{(b-a)x}\,\mathrm{d}x + C'\right)$

二阶常系数齐次线性方程

研究二阶常系数齐次线性方程：$y'' + py' + qy = 0$

1. 恒等变形：得 $(y'' - ay') - b(y' - ay) = 0$
2. 变量代换：令 $z = y' - ay$，则 $z' - bz = 0$
3. 求解方程：得 $z = Ce^{bx}$，即 $y' - ay = Ce^{bx}$
4. 求解方程：得 $y = \mathrm{e}^{ax}\left(\int Ce^{(b-a)x}\,\mathrm{d}x + C'\right)$
   - 当 $a \neq b$ 时，$y = C_1\mathrm{e}^{ax} + C_2\mathrm{e}^{bx}$

二阶常系数齐次线性方程

研究二阶常系数齐次线性方程：$y'' + py' + qy = 0$

1 恒等变形：得 $(y'' - ay') - b(y' - ay) = 0$

2 变量代换：令 $z = y' - ay$，则 $z' - bz = 0$

3 求解方程：得 $z = Ce^{bx}$，即 $y' - ay = Ce^{bx}$

4 求解方程：得 $y = \mathrm{e}^{ax}\left(\int Ce^{(b-a)x}\,\mathrm{d}x + C'\right)$

- 当 $a \neq b$ 时，$y = C_1\mathrm{e}^{ax} + C_2\mathrm{e}^{bx}$
- 当 $a = b$ 时，$y = (C_1 + C_2 x)\mathrm{e}^{ax}$

二阶常系数齐次线性方程

研究二阶常系数齐次线性方程：$y'' + py' + qy = 0$

1 恒等变形：得 $(y'' - ay') - b(y' - ay) = 0$

2 变量代换：令 $z = y' - ay$，则 $z' - bz = 0$

3 求解方程：得 $z = Ce^{bx}$，即 $y' - ay = Ce^{bx}$

4 求解方程：得 $y = e^{ax}\left(\int Ce^{(b-a)x}\,dx + C'\right)$

- 当 $a \neq b$ 时，$y = C_1 e^{ax} + C_2 e^{bx}$
- 当 $a = b$ 时，$y = (C_1 + C_2 x)e^{ax}$

问题　常数 a 和 b 是否一定存在？如何求出它？

二阶常系数齐次线性方程

研究二阶常系数齐次线性方程：$y'' + py' + qy = 0$

1 恒等变形：得 $(y'' - ay') - b(y' - ay) = 0$

2 变量代换：令 $z = y' - ay$，则 $z' - bz = 0$

3 求解方程：得 $z = Ce^{bx}$，即 $y' - ay = Ce^{bx}$

4 求解方程：得 $y = \mathrm{e}^{ax}\left(\int Ce^{(b-a)x}\,\mathrm{d}x + C'\right)$

- 当 $a \neq b$ 时，$y = C_1\,\mathrm{e}^{ax} + C_2\,\mathrm{e}^{bx}$
- 当 $a = b$ 时，$y = (C_1 + C_2 x)\mathrm{e}^{ax}$

问题　常数 a 和 b 是否一定存在？如何求出它？

解答　a 和 b 是方程 $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ 的两个根.

研究二阶常系数线性齐次方程：$y'' + py' + qy = 0$.

研究二阶常系数线性齐次方程：$y'' + py' + qy = 0$.

. . . .

设其特征方程 $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ 的两个根为 λ_1 和 λ_2.

研究二阶常系数线性齐次方程：$y'' + py' + qy = 0$.

. . . .

设其特征方程 $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ 的两个根为 λ_1 和 λ_2.

1 若 $\lambda_1 \neq \lambda_2$ 为相异实根，则方程的通解为

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$$

研究二阶常系数线性齐次方程：$y'' + py' + qy = 0$.

……………………………………

设其特征方程 $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ 的两个根为 λ_1 和 λ_2.

1 若 $\lambda_1 \neq \lambda_2$ 为相异实根，则方程的通解为

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$$

2 若 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ 为相同实根，则方程的通解为

$$y = (C_1 + C_2 x) e^{\lambda x}$$

研究二阶常系数线性齐次方程：$y'' + py' + qy = 0$.

. . . .

设其特征方程 $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ 的两个根为 λ_1 和 λ_2.

1 若 $\lambda_1 \neq \lambda_2$ 为相异实根，则方程的通解为

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$$

2 若 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ 为相同实根，则方程的通解为

$$y = (C_1 + C_2 x) e^{\lambda x}$$

3 若 $\lambda_1 = \alpha + i\beta, \lambda_2 = \alpha - i\beta$ 为共轭复根，则方程的通解为

$$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$$

差分

定义 1　对于数列 y_x（$x = 0, 1, 2, \cdots$），

差分

定义 1　对于数列 y_x（$x = 0, 1, 2, \cdots$），称

$$\Delta y_x = y_{x+1} - y_x$$

为 y_x 的（一阶）差分；

差分

定义 1　对于数列 y_x（$x = 0, 1, 2, \cdots$），称

$$\Delta y_x = y_{x+1} - y_x$$

为 y_x 的（一阶）差分；称

$$\Delta^2 y_x = \Delta(\Delta y_x) = \Delta y_{x+1} - \Delta y_x$$

为 y_x 的二阶差分.

差分

定义 1　对于数列 y_x（$x = 0, 1, 2, \cdots$），称

$$\Delta y_x = y_{x+1} - y_x$$

为 y_x 的（一阶）差分；称

$$\Delta^2 y_x = \Delta(\Delta y_x) = \Delta y_{x+1} - \Delta y_x$$

为 y_x 的二阶差分.

例 1　求 $y_x = x^2$ 的各阶差分.

差分

定义 1　对于数列 y_x（$x=0,1,2,\cdots$），称

$$\Delta y_x = y_{x+1} - y_x$$

为 y_x 的（一阶）差分；称

$$\Delta^2 y_x = \Delta(\Delta y_x) = \Delta y_{x+1} - \Delta y_x$$

为 y_x 的二阶差分.

例 1　求 $y_x = x^2$ 的各阶差分.

例 2　求 $y_x = a^x$ 的各阶差分.

差分的性质

性质　差分具有以下性质：

1 $\Delta(cy_x) = c\Delta y_x$

差分的性质

性质　差分具有以下性质：

1. $\Delta(cy_x) = c\Delta y_x$
2. $\Delta(y_x \pm z_x) = \Delta y_x \pm \Delta z_x$

差分的性质

性质　差分具有以下性质:

1. $\Delta(cy_x) = c\Delta y_x$
2. $\Delta(y_x \pm z_x) = \Delta y_x \pm \Delta z_x$
3. $\Delta(y_x z_x) = z_x \Delta y_x + y_{x+1} \Delta z_x$

差分的性质

性质　差分具有以下性质：

1. $\Delta(cy_x) = c\Delta y_x$
2. $\Delta(y_x \pm z_x) = \Delta y_x \pm \Delta z_x$
3. $\Delta(y_x z_x) = z_x \Delta y_x + y_{x+1} \Delta z_x$
4. $\Delta\left(\dfrac{y_x}{z_x}\right) = \dfrac{z_x \Delta y_x - y_x \Delta z_x}{y_x y_{x+1}}$

差分方程

定义 形如

$$F(x, y_x, \Delta y_x, \Delta^2 y_x, \cdots, \Delta^n y_x) = 0$$

的方程称为差分方程.

差分方程

定义 形如

$$F(x, y_x, \Delta y_x, \Delta^2 y_x, \cdots, \Delta^n y_x) = 0$$

的方程称为差分方程.

例 3 说明下面两个方程是等价的:

- $\Delta^2 y_x - 2y_x = 3^x$
- $y_{x+2} - 2y_{x+1} - y_x = 3^x$

差分方程

定义　形如

$$F(x, y_x, y_{x+1}, y_{x+2}, \cdots, y_{x+n}) = 0$$

的方程称为差分方程.

差分方程

定义　形如

$$F(x, y_x, y_{x+1}, y_{x+2}, \cdots, y_{x+n}) = 0$$

的方程称为差分方程.

定义　差分方程中未知数列下标的最大值和最小值的差，称为该差分方程的阶.

差分方程

定义 形如

$$F(x, y_x, y_{x+1}, y_{x+2}, \cdots, y_{x+n}) = 0$$

的方程称为差分方程.

定义 差分方程中未知数列下标的最大值和最小值的差，称为该差分方程的阶.

例 4 $y_{x+2} - y_{x+1} = x$ 为一阶差分方程.

差分方程

定义 形如

$$F(x, y_x, y_{x+1}, y_{x+2}, \cdots, y_{x+n}) = 0$$

的方程称为差分方程.

定义 差分方程中未知数列下标的最大值和最小值的差，称为该差分方程的阶.

例 4 $y_{x+2} - y_{x+1} = x$ 为一阶差分方程.

例 5 $y_{x+2} = y_{x+1} + y_x$ 为二阶差分方程.

定义 2　如果一个数列代入差分方程后，方程两边恒等，则称此数列为该差分方程的解.

定义 2　如果一个数列代入差分方程后，方程两边恒等，则称此数列为该差分方程的**解**.

- 满足一定的初始条件的解称为**特解**.

定义 2　如果一个数列代入差分方程后，方程两边恒等，则称此数列为该差分方程的解.

- 满足一定的初始条件的解称为特解.
- 含有 n 个相互独立的任意常数的解称为 n 阶差分方程的通解.

定义 2 如果一个数列代入差分方程后，方程两边恒等，则称此数列为该差分方程的解.

- 满足一定的初始条件的解称为特解.
- 含有 n 个相互独立的任意常数的解称为 n 阶差分方程的通解.

例 6 一阶差分方程 $y_{x+1} - y_x = 2$, $y_0 = 1$ 有特解为

定义 2　如果一个数列代入差分方程后，方程两边恒等，则称此数列为该差分方程的解.

- 满足一定的初始条件的解称为特解.
- 含有 n 个相互独立的任意常数的解称为 n 阶差分方程的通解.

例 6　一阶差分方程 $y_{x+1}-y_x=2,\ y_0=1$ 有特解为 $y_x=2x+1$.

定义 2 如果一个数列代入差分方程后，方程两边恒等，则称此数列为该差分方程的解.

- 满足一定的初始条件的解称为特解.
- 含有 n 个相互独立的任意常数的解称为 n 阶差分方程的通解.

例 6 一阶差分方程 $y_{x+1} - y_x = 2,\ y_0 = 1$ 有特解为 $y_x = 2x + 1$.

例 7 二阶差分方程 $y_{x+2} - 3y_{x+1} + 2y_x = 0$ 的通解为

定义 2　如果一个数列代入差分方程后，方程两边恒等，则称此数列为该差分方程的解.

- 满足一定的初始条件的解称为特解.
- 含有 n 个相互独立的任意常数的解称为 n 阶差分方程的通解.

例 6　一阶差分方程 $y_{x+1}-y_x=2$, $y_0=1$ 有特解为 $y_x=2x+1$.

例 7　二阶差分方程 $y_{x+2}-3y_{x+1}+2y_x=0$ 的通解为 $y_x=C_1+C_2 2^x$.

第一节	微分方程的一般概念
第二节	一阶微分方程
第三节	二阶微分方程*
第四节	差分方程的一般概念
第五节	一阶常系数线性差分方程
第六节	二阶常系数线性差分方程*

研究一阶常系数线性差分方程 $y_{x+1} - ay_x = c$.

研究一阶常系数线性差分方程 $y_{x+1} - a y_x = c$.

- 若 $a = 1$，解为 $y_x = y_0 + cx$.

研究一阶常系数线性差分方程 $y_{x+1} - ay_x = c$.

- 若 $a = 1$，解为 $y_x = y_0 + cx$.
- 若 $a \neq 1$，解为 $y_x = \left(y_0 - \dfrac{c}{1-a}\right)a^x + \dfrac{c}{1-a}$.

研究一阶常系数线性差分方程 $y_{x+1} - a y_x = c$.

- 若 $a = 1$，解为 $y_x = y_0 + cx$.
- 若 $a \neq 1$，解为 $y_x = \left(y_0 - \dfrac{c}{1-a}\right) a^x + \dfrac{c}{1-a}$.

例 1　求差分方程 $y_{x+1} - 3y_x = -2$ 的通解.

例 2　广州公积金贷款年利率为 3.25%．现贷款 50 万元，贷款年限为 20 年．采用等额本息还款方式，每月还款金额是多少？

例 2　广州公积金贷款年利率为 3.25%．现贷款 50 万元，贷款年限为 20 年．采用等额本息还款方式，每月还款金额是多少？

解答　设贷款 x 个月后欠款余额是 y_x 元，月还款额为 m 元，月利率为 r（即年利率除以 12）．则有

$$y_{x+1} = y_x(1+r) - m, \quad y_0 = 500000.$$

例 2　广州公积金贷款年利率为 3.25%．现贷款 50 万元，贷款年限为 20 年．采用等额本息还款方式，每月还款金额是多少？

解答　设贷款 x 个月后欠款余额是 y_x 元，月还款额为 m 元，月利率为 r（即年利率除以 12）．则有

$$y_{x+1} = y_x(1+r) - m, \quad y_0 = 500000.$$

该差分方程的解为

$$y_x = (y_0 - m/r)(1+r)^x + m/r.$$

例 2　广州公积金贷款年利率为 3.25%．现贷款 50 万元，贷款年限为 20 年．采用等额本息还款方式，每月还款金额是多少？

解答　设贷款 x 个月后欠款余额是 y_x 元，月还款额为 m 元，月利率为 r（即年利率除以 12）．则有

$$y_{x+1} = y_x(1+r) - m, \quad y_0 = 500000.$$

该差分方程的解为

$$y_x = (y_0 - m/r)(1+r)^x + m/r.$$

从而可以解出

$$m = \frac{r\left[y_0(1+r)^x - y_x\right]}{(1+r)^x - 1}.$$

例 2 广州公积金贷款年利率为 3.25%．现贷款 50 万元，贷款年限为 20 年．采用等额本息还款方式，每月还款金额是多少？

解答 设贷款 x 个月后欠款余额是 y_x 元，月还款额为 m 元，月利率为 r（即年利率除以 12）．则有

$$y_{x+1} = y_x(1+r) - m, \quad y_0 = 500000.$$

该差分方程的解为

$$y_x = (y_0 - m/r)(1+r)^x + m/r.$$

从而可以解出

$$m = \frac{r\left[y_0(1+r)^x - y_x\right]}{(1+r)^x - 1}.$$

当 $x = 240$ 时，$y_x = 0$，

例 2　广州公积金贷款年利率为 3.25%．现贷款 50 万元，贷款年限为 20 年．采用等额本息还款方式，每月还款金额是多少？

解答　设贷款 x 个月后欠款余额是 y_x 元，月还款额为 m 元，月利率为 r（即年利率除以 12）．则有

$$y_{x+1} = y_x(1+r) - m, \quad y_0 = 500000.$$

该差分方程的解为

$$y_x = (y_0 - m/r)(1+r)^x + m/r.$$

从而可以解出

$$m = \frac{r\,[y_0(1+r)^x - y_x]}{(1+r)^x - 1}.$$

当 $x = 240$ 时，$y_x = 0$，代入得到 $m = 2835.97$．

研究二阶常系数线性齐次差分方程

$$y_{x+2} + py_{x+1} + qy_x = 0.$$

. . . .

设其特征方程 $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ 的两个根为 λ_1 和 λ_2.

研究二阶常系数线性齐次差分方程

$$y_{x+2} + py_{x+1} + qy_x = 0.$$

设其特征方程 $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ 的两个根为 λ_1 和 λ_2.

1 若 $\lambda_1 \neq \lambda_2$ 为相异实根，则方程的通解为

$$y_x = C_1\lambda_1^x + C_2\lambda_2^x$$

研究二阶常系数线性齐次差分方程

$$y_{x+2} + py_{x+1} + qy_x = 0.$$

设其特征方程 $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ 的两个根为 λ_1 和 λ_2.

1 若 $\lambda_1 \neq \lambda_2$ 为相异实根，则方程的通解为

$$y_x = C_1\lambda_1^x + C_2\lambda_2^x$$

2 若 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ 为相同实根，则方程的通解为

$$y_x = (C_1 + C_2 x)\lambda^x$$

研究二阶常系数线性齐次差分方程

$$y_{x+2} + py_{x+1} + qy_x = 0.$$

设其特征方程 $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ 的两个根为 λ_1 和 λ_2.

1 若 $\lambda_1 \neq \lambda_2$ 为相异实根，则方程的通解为

$$y_x = C_1\lambda_1^x + C_2\lambda_2^x$$

2 若 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ 为相同实根，则方程的通解为

$$y_x = (C_1 + C_2x)\lambda^x$$

3 若 $\lambda_1 = \alpha + i\beta = r(\cos\theta + i\sin\theta)$,

$\lambda_2 = \alpha - i\beta = r(\cos\theta - i\sin\theta)$ 为共轭复根，则通解为

$$y_x = r^x(C_1\cos\theta x + C_2\sin\theta x)$$