例1. 求解$(yy')^2+y^2=1$.

解： $yy'=\pm\sqrt{1-y^2}$

$$\Rightarrow \frac{y\mathrm{d}y}{\sqrt{1-y^2}}=\pm\mathrm{d}x\left(y^2\neq 1\right)$$

$$\Rightarrow \int\frac{y\mathrm{d}y}{\sqrt{1-y^2}}=\pm\int\mathrm{d}x$$

$$\Rightarrow -\sqrt{1-y^2}=\pm x+C$$

$\Rightarrow (x+C)^2+y^2=1$为方程的通解.

验证$y=\pm1$是方程的奇解.

可分离变量方程

例2. 求$xy' = \sqrt{1+y^2}$满足$y|_{x=1} = 0$的特解.

解: $\dfrac{dy}{\sqrt{1+y^2}} = \dfrac{dx}{x} \Rightarrow \displaystyle\int \dfrac{dy}{\sqrt{1+y^2}} = \int \dfrac{dx}{x}$

$$\Rightarrow \ln\left|y+\sqrt{1+y^2}\right| = \ln|x| + C$$

由$y|_{x=1} = 0 \Rightarrow C = 0$

$$\left.\begin{aligned} &\Rightarrow y+\sqrt{1+y^2} = \pm x \\ &\sqrt{1+y^2} - y = \pm\frac{1}{x} \end{aligned}\right\}$$

两式相减，得$y = \pm\dfrac{1}{2}\left(x - \dfrac{1}{x}\right)$

例1. 求解$xy' = y - \sqrt{x^2 + y^2}\,(x > 0)$.

解：$y' = \dfrac{y}{x} - \sqrt{1 + \dfrac{y^2}{x^2}}$，设 $\dfrac{y}{x} = u$，$y = ux$

$\Rightarrow y' = xu' + u$，代入得$xu' + u = u - \sqrt{1 + u^2}$

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1+u^2}} = -\frac{\mathrm{d}x}{x}$$

$$\Rightarrow \ln\left|u + \sqrt{1+u^2}\right| = -\ln x + C$$

$\Rightarrow \ln\left|\dfrac{y}{x} + \sqrt{1 + \dfrac{y^2}{x^2}}\right| = -\ln x + C$为方程通解.

例2. 求解$y' = \dfrac{1-x+y}{x-y}$.

解： 令$x-y=u$, $\Rightarrow y' = 1-u'$

代入得,$1-u' = \dfrac{1-u}{u}$

$$\Rightarrow u' = 2-\frac{1}{u} \quad \Rightarrow \frac{u\mathrm{d}u}{2u-1} = \mathrm{d}x \,(2u-1 \neq 0)$$

$$\Rightarrow \int \frac{u\mathrm{d}u}{2u-1} = \int \mathrm{d}x \Rightarrow \frac{1}{2}\int \frac{2u-1+1}{2u-1}\mathrm{d}u = \int \mathrm{d}x$$

$$\Rightarrow u + \frac{1}{2}\ln|2u-1| = 2x + C$$

$\Rightarrow (x-y) + \dfrac{1}{2}\ln|2(x-y)-1| = 2x + C$为方程的通解.

奇解为$y = x - \dfrac{1}{2}$.

换元法

例. 求解$y' = \dfrac{x+y-3}{x-y+1}$.

一般地： $y' = \dfrac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}$,

1）如果$c_1=c_2=0$, 齐次方程.

2）如果$\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}=\lambda$, $y' = \dfrac{\lambda(a_2x+b_2y)+c_1}{(a_2x+b_2y)+c_2}$,

设$a_2x+b_2y=u$, $y' = \dfrac{1}{b_2}u' - \dfrac{a_2}{b_2} = \dfrac{\lambda u+c_1}{u+c_2}$

3）如果$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1=0 \\ a_2x+b_2y+c_2=0 \end{cases}$, 解为$\begin{cases} x=x_0 \\ y=y_0 \end{cases}$,

设$\begin{cases} \xi = x-x_0 \\ \eta = y-y_0 \end{cases} \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{d\eta}{d\xi} = \dfrac{a_1\xi+b_1\eta+(a_1x_0+b_1y_0+c_1)}{a_2\xi+b_2\eta+(a_2x_0+b_2y_0+c_1)}$,

方程化为齐次.

换元法

例. 求解$y' = \dfrac{x+y-3}{x-y+1}$.

解. $\begin{cases} x+y-3=0 \\ x-y+1=0 \end{cases}$, 解为$\begin{cases} x_0=1 \\ y_0=2 \end{cases}$, 设$\begin{cases} \xi = x-1 \\ \eta = y-2 \end{cases}$,

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{d\eta}{d\xi} = \frac{\xi+\eta}{\xi-\eta}, \quad 设\ \frac{\eta}{\xi}=u, \quad \eta=u\xi,$$

方程化为$(u\xi)' = \dfrac{1+u}{1-u}$, $\quad \Rightarrow u+\xi u' = \dfrac{1+u}{1-u}$,

$$\Rightarrow \xi u' = \frac{1+u^2}{1-u} \quad \Rightarrow \int \frac{1-u}{1+u^2} du = \int \frac{1}{\xi} d\xi + C$$

$$\Rightarrow \arctan u - \frac{1}{2}\ln\left(1+u^2\right) = \ln|\xi| + C$$

$$\Rightarrow \arctan\frac{y-2}{x-1} - \frac{1}{2}\ln\left(1+\left(\frac{y-2}{x-1}\right)^2\right) = \ln\left|\frac{1}{x-1}\right| + C$$ 为方程的通解

例. 求解$xy'+y=y(\ln x+\ln y)$.

解：$xy'+y=y\ln xy,$

$$\Rightarrow (xy)'=y\ln xy$$

设$xy=u$, $\quad u'=\dfrac{u}{x}\ln u,$

$$\Rightarrow \frac{du}{u\ln u}=\frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow \int\frac{du}{u\ln u}=\int\frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow \ln|\ln u|=\ln|x|+C$$

$\Rightarrow \ln|\ln xy|=\ln|x|+C$为方程通解.

例1. 求方程$xy' = y + x^2 e^x$的通解.

解：$y' = \dfrac{1}{x} y + x e^x$， $p(x) = \dfrac{1}{x}, q(x) = x e^x$

$$\Rightarrow y = e^{\int p(x)\mathrm{d}x}\left[C + \int q(x) e^{-\int p(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x\right]$$

$$= e^{\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x}\left[C + \int x e^x e^{-\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x\right]$$

$$= x\left[C + \int x e^x \frac{1}{x}\mathrm{d}x\right]$$

故通解为$y = x\left(C + e^x\right)$.

例2. 求方程$y' = \dfrac{y}{x + y^2 e^y}$的通解.

解: $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{1}{y} x + y e^y$,

$$\Rightarrow x = e^{\int p(y)dy}\left[C + \int q(y) e^{-\int p(y)dy} dy\right]$$

$$= e^{\int \frac{1}{y}dy}\left[C + \int y e^y e^{-\int \frac{1}{y}dy} dy\right]$$

$$= y\left[C + \int y e^y \frac{1}{y} dy\right]$$

故通解为$x = y\left(C + e^y\right)$.

例. 一个有进出两个水嘴的圆柱形大桶有含物质A的浓度为50%的水溶液b升，现同时打开进出两水嘴，让进水嘴流入大桶中含物质A浓度为10%的水溶液，此时进出两水嘴流速均为a升/分，问多长时间大桶浓度为20%.

解： 用t表示时间，$t=0$时起始，时间t时桶内浓度为y，

给t一个增量Δt，相应地得y的一个增量,

$$\Delta y = y_{t+\Delta t} - y_t = \frac{by + a10\%\Delta t - ay\Delta t}{b} - y$$

$$\Rightarrow \Delta y = \frac{\frac{a}{10} - ay}{b}\Delta t \quad \Rightarrow \frac{dy}{dt} = -\frac{a}{b}y + \frac{a}{10b}$$

一阶线性微分方程

$$\Rightarrow \frac{dy}{dt} = -\frac{a}{b}y + \frac{a}{10b}$$ （一阶线性非齐次微分方程）

$$\Rightarrow y = e^{\int -\frac{a}{b}dt}\left[C + \int \frac{a}{10b} e^{\int \frac{a}{b}dt} dt\right]$$

$$= e^{-\frac{a}{b}t}\left[C + \frac{1}{10} e^{\frac{a}{b}t}\right]$$

条件 $y|_{t=0} = \frac{1}{2}$， 代入$C = \frac{2}{5}$，

$$\Rightarrow y = \frac{2}{5} e^{-\frac{a}{b}t} + \frac{1}{10}$$

令$y = 20\% = \frac{1}{5}$，得$t = \frac{b}{a}\ln 4.$

例. 一个有进出两个水嘴的圆柱形大桶有含物质A的浓度为50%的水溶液b升，现同时打开进出两水嘴，让进水嘴流入大桶中含物质A浓度为10%的水溶液，此时进出两水嘴流速均为a升/分，问多长时间大桶浓度为20%.

例. 求方程$y' = \frac{y}{x} + x^2 y^2$的通解.

解：$y^{-2}y' = \frac{1}{x}y^{-1} + x^2$

$$\Rightarrow -\left(y^{-1}\right)' = \frac{1}{x}y^{-1} + x^2 \quad \Rightarrow \left(y^{-1}\right)' = -\frac{1}{x}y^{-1} - x^2$$

$$\Rightarrow y^{-1} = e^{\int p(x)\mathrm{d}x}\left[C + \int q(x)e^{-\int p(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x\right]$$

$$= e^{-\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x}\left[C - \int x^2 e^{\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x\right]$$

$$= \frac{1}{x}\left[C - \int x^3 \mathrm{d}x\right]$$

$$= \frac{1}{x}\left[C - \frac{1}{4}x^4\right]$$

故通解为$y^{-1} = \frac{1}{x}\left(C - \frac{1}{4}x^4\right)$

例1. 求方程$y' = \dfrac{x^2 - y}{x - y}$的通解.

解: $(x^2 - y)dx + (y - x)dy = 0$

$$\Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = -1$$ $\Rightarrow$ 方程为全微分方程.

通解为$\int_{(0,0)}^{(x,y)} (x^2 - y)dx + (y - x)dy = C$

即$\int_0^x (x^2 - 0)dx + \int_0^y (y - x)dy$

$$= \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}y^2 - xy = C$$

$\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}y^2 - xy = C$为方程的通解.

例2. 求方程$y^2dx+(xy+\ln y)dy=0$的通解.

解： $P=y^2, Q=xy+\ln y \quad \Rightarrow \dfrac{\partial P}{\partial y}=2y, \dfrac{\partial Q}{\partial x}=y.$

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\Big/P=-\frac{1}{y}.$$

$$\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)\Big/Q \text{ 为}x\text{的函数}$$

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\Big/P \text{ 为}y\text{的函数.}$$

故$u(y)=e^{\int\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)/P\,dy}=e^{-\int\frac{1}{y}dy}=\dfrac{1}{y}$

方程化为$ydx+\left(x+\dfrac{\ln y}{y}\right)dy=0\,(y\neq 0).$

此时化为全微分方程.

通解为$\displaystyle\int_{(0,1)}^{(x,y)} ydx+\left(x+\frac{\ln y}{y}\right)dy=C$

即$\displaystyle\int_0^x dx+\int_1^y\left(x+\frac{\ln y}{y}\right)dy=C \Rightarrow xy+\frac{1}{2}\ln^2 y=C$为通解.

例. 求方程$xy''' - y'' = x^2e^x$的通解.

解：令$y'' = u$，方程化为 $u' = \frac{1}{x}u + xe^x$

$$\Rightarrow u = e^{\int p(x)\mathrm{d}x}\left[C_1 + \int q(x)e^{-\int p(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x\right]$$

$$= e^{\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x}\left[C_1 + \int xe^x e^{-\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x\right] = x\left[C_1 + e^x\right]$$

$$\Rightarrow y'' = C_1x + xe^x$$

$$\Rightarrow y' = C_1\int x\mathrm{d}x + \int xe^x\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}C_1x^2 + xe^x - e^x + C_2$$

故通解为$y = \frac{1}{6}C_1x^3 + xe^x - 2e^x + C_2x + C_3$

例. 一艘走私船在原点处，沿y轴以匀速a行驶，又有一缉私船在(−4, 0)点处同时以匀速2a追赶走私船，其方向始终指向走私船.(1)求缉私船运行的轨迹方程；(2)问经过多长时间缉私船能追上走私船.

解： 设$t=0$时两船在初始位置，经过时间t，走私船走到$(0, at)$

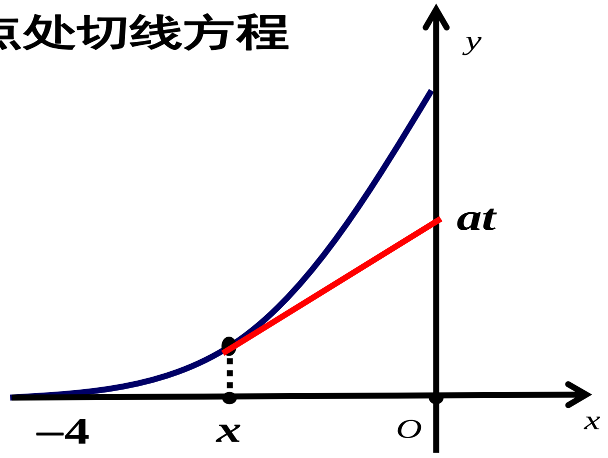
缉私船到(x, y)点$(x<0)$，则(x, y)点处切线方程

$$Y-y=y'(X-x)$$

方程过$(0, at)$点

$$at=y-xy' \qquad (1)$$

$$2at=\int_{-4}^{x}\sqrt{1+y'^2}\,dx \qquad (2)$$



例. 一艘走私船在原点处，沿y轴以匀速a行驶，又有一缉私船在$(-4, 0)$点处同时以匀速$2a$追赶走私船，其方向始终指向走私船.(1)求缉私船运行的轨迹方程；(2)问经过多长时间缉私船能追上走私船.

$$\Rightarrow 2(y - xy') = \int_{-4}^{x} \sqrt{1+y'^2}\,dx$$

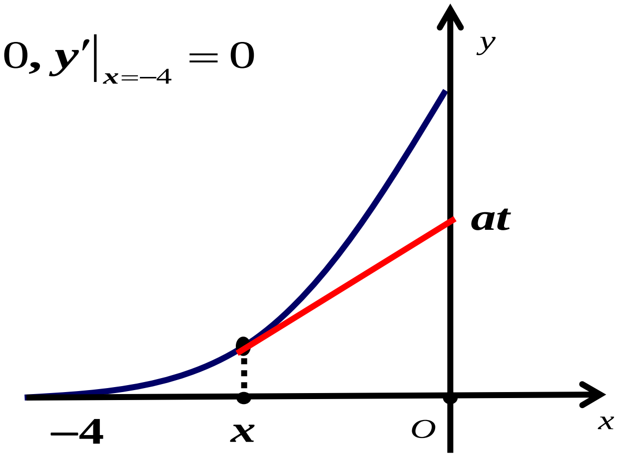
求导，$-2xy'' = \sqrt{1+y'^2}$　满足 $y|_{x=-4} = 0, y'|_{x=-4} = 0$

设$y' = u$，化为$-2xu' = \sqrt{1+u^2}$，

$$\Rightarrow \int \frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = -\frac{1}{2}\int \frac{dx}{x},$$

$$\Rightarrow \ln\left(u + \sqrt{1+u^2}\right) = -\frac{1}{2}\ln(-x) + C,$$

易见y单增，由$u|_{x=-4} = y'|_{x=-4} = 0$



例. 一艘走私船在原点处，沿y轴以匀速a行驶，又有一缉私船在(−4, 0)点处同时以匀速$2a$追赶走私船，其方向始终指向走私船.(1)求缉私船运行的轨迹方程；(2)问经过多长时间缉私船能追上走私船.

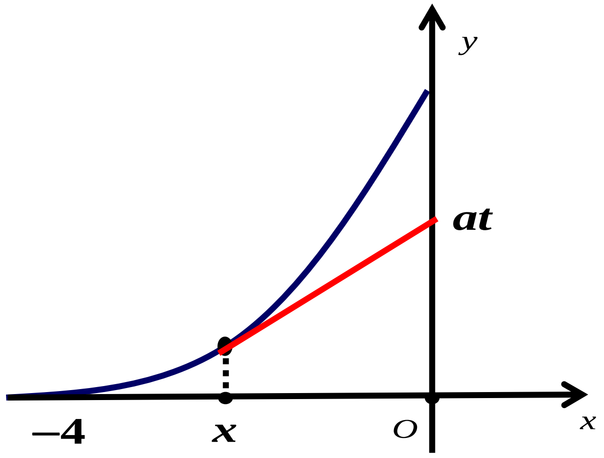
$$\Rightarrow C=\ln 2 \quad \Rightarrow u+\sqrt{1+u^2}=\frac{2}{\sqrt{-x}} \quad \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1+u^2}-u}=\frac{2}{\sqrt{-x}}$$

$$\Rightarrow \sqrt{1+u^2}-u=\frac{1}{2}\sqrt{-x}$$

两式相减，$u=y'=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2}{\sqrt{-x}}-\dfrac{1}{2}\sqrt{-x}\right)$

$$\Rightarrow y=\frac{1}{6}(-x)^{\frac{3}{2}}-2(-x)^{\frac{1}{2}}+\frac{8}{3}$$

令$x\to 0, y\to \dfrac{8}{3}=at \quad \Rightarrow t=\dfrac{8}{3a}$



例. 在上半平面求一条凹的曲线，要求曲线上任一点$P(x,y)$处曲率与该点处法线段PQ的长度的倒数相等，（Q是P点法线与x轴交点），且在曲线（1，1）点处切线与x轴平行.

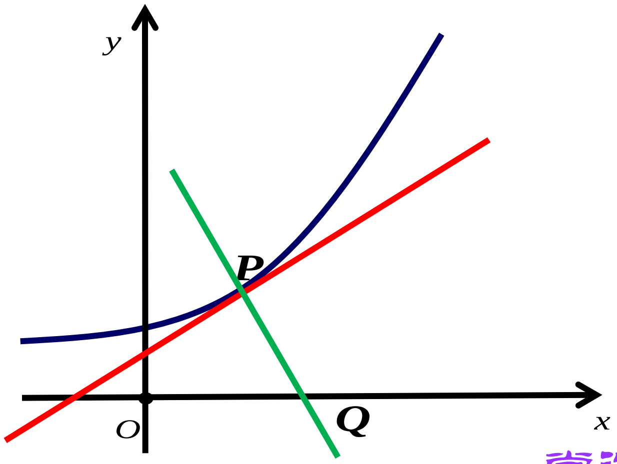
解： P点处法线$Y-y=-\dfrac{1}{y'}(X-x)$，与x轴交点$Q(x+yy',0)$,

$$\left|\overline{PQ}\right|=\sqrt{y^2y'^2+y^2}\ =y\sqrt{1+y'^2}$$

$P(x,y)$点处曲率$K=\dfrac{y''}{\left(1+y'^2\right)^{\frac{3}{2}}}$

由题意，$\dfrac{\left(1+y'^2\right)^{\frac{3}{2}}}{y''}=y\sqrt{1+y'^2}$

$\Rightarrow yy''=1+y'^2$，满足$y\big|_{x=1}=1, y'\big|_{x=1}=0$



转化为求方程$\begin{cases} yy''=1+y'^2 \\ y\big|_{x=1}=1, y'\big|_{x=1}=0 \end{cases}$的特解

令$y'=u$，$y''=u\dfrac{du}{dy}$，方程化为$yu\dfrac{du}{dy}=1+u^2$

$$\Rightarrow \int \frac{udu}{1+u^2}=\int \frac{dy}{y} \Rightarrow \frac{1}{2}\ln\left(1+u^2\right)=\ln|y|+C_0$$

$\Rightarrow 1+u^2=C_1 y$，由$x=1$时，$y=1, u=0, \Rightarrow C_1=1$

$$\Rightarrow u=\pm\sqrt{y^2-1}=y' \Rightarrow \frac{dy}{\sqrt{y^2-1}}=\pm dx$$

$$\Rightarrow \int \frac{dy}{\sqrt{y^2-1}}=\pm\int dx \Rightarrow \ln\left|y+\sqrt{y^2-1}\right|=\pm x+C_2$$

$\Rightarrow y+\sqrt{y^2-1}=C_3 e^{\pm x}$，由$x=1$时，$y=1, \Rightarrow C_3=e^{\mp 1}$

$$\Rightarrow y+\sqrt{y^2-1}=e^{\pm(x-1)}, \Rightarrow y-\sqrt{y^2-1}=e^{\mp(x-1)},$$

故方程的解$y=\dfrac{1}{2}\left(e^{x-1}+e^{1-x}\right)$.

例. 设线性无关的函数y_1,y_2,y_3都是二阶非齐次线性方程$y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$的解，c_1,c_2是任意常数，则该非齐次方程的通解是(　　).

A. $c_1y_1+c_2y_2+y_3$;　　B. $c_1y_1+c_2y_2-(c_1+c_2)y_3$;

C. $c_1y_1+c_2y_2-(1-c_1-c_2)y_3$;　D. $c_1y_1+c_2y_2+(1-c_1-c_2)y_3$;

分析：非齐次方程–非齐次方程=齐次方程

y_1-y_3是齐次方程，y_2-y_3是齐次方程

齐次方程+非齐次方程=非齐次方程

$$y=c_1(y_1-y_3)+c_2(y_2-y_3)+y_3;$$

例. 已知$y_1 = xe^x + e^{2x}, y_2 = xe^x - e^{-x}, y_3 = xe^x + e^{2x} + e^{-x}$
为某二阶线性常系数非齐次方程特解，求此方程.

解：$y_3 - y_1 = e^{-x}$是齐次方程的特解,

$(y_3 - y_2) - 2(y_3 - y_1) = e^{2x}$ 也是齐次方程的特解,

设该二阶方程为$y'' + ay' + by = f(x)$

特征方程为$(\lambda - 2)(\lambda + 1) = 0 \Rightarrow \lambda^2 - \lambda - 2 = 0$

故方程为$y'' - y' - 2y = f(x)$

$(y_3 - y_1) + y_2 = xe^x$也是非齐次方程的特解,

$(xe^x)' = e^x + xe^x$, $(xe^x)'' = \left[(1 + x)e^x\right]' = (2 + x)e^x$

$\Rightarrow f(x) = e^x - 2xe^x$

故方程为$y'' - y' - 2y = e^x - 2xe^x$

例1. 求方程$y''+3y'+2y=0$的通解.

解: 特征方程$\lambda^2+3\lambda+2=0$

特征根为$\lambda_1=-1, \lambda_2=-2$

故通解为$y=C_1e^{-x}+C_2e^{-2x}$

例2. 求方程$y''+2y'+y=0$的通解.

解: 特征方程$\lambda^2+2\lambda+1=0$

特征根为$\lambda_1=\lambda_2=-1$

故通解为$y=C_1e^{-x}+C_2xe^{-x}$

例3. 求方程$y''+y=0$的通解.

解： 特征方程$\lambda^2+1=0$

特征根为$\lambda_1=i,\lambda_2=-i$

故通解为$y=C_1\cos x+C_2\sin x$

例4. 求方程$y^{(4)}+2y'''-y''=0$的通解.

解： 特征方程$\lambda^4+2\lambda^3-\lambda^2=0$

$$\Rightarrow \lambda^2\left(\lambda^2+2\lambda-1\right)=0$$

特征根为$\lambda_1=\lambda_2=0,\lambda_3=-1+\sqrt{2},\lambda_4=-1-\sqrt{2}$

故通解为$y=C_1+C_2x+C_3e^{(-1+\sqrt{2})x}+C_4e^{(-1-\sqrt{2})x}$

例. 设$y=y(x)$是微分方程$y''+by'+cy=0$的解，其中b,c为正常数，则$\lim\limits_{x\to+\infty} y(x)$(　　).

A. 与解的初值$y(0),y'(0)$有关，与b,c无关;

B. 与解的初值$y(0),y'(0)$及b,c都无关;

C. 与解的初值$y(0),y'(0)$及c无关，只与b有关;

D. 与解的初值$y(0),y'(0)$及b无关，只与c有关.

分析:1)若特征方程有两不同实根

$$\lambda=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4c}}{2}$$

$$y(x)=C_1e^{\frac{-b+\sqrt{b^2-4c}}{2}x}+C_2e^{\frac{-b-\sqrt{b^2-4c}}{2}x}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} y(x)=0$$

例. 设$y=y(x)$是微分方程$y''+by'+cy=0$的解，其中b,c为正常数，则$\lim\limits_{x\to+\infty} y(x)$(　　).

A. 与解的初值$y(0),y'(0)$有关，与b,c无关;

B. 与解的初值$y(0),y'(0)$及b,c都无关;

C. 与解的初值$y(0),y'(0)$及c无关，只与b有关;

D. 与解的初值$y(0),y'(0)$及b无关，只与c有关.

分析:2)若特征方程有两相同实根

$$\lambda=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4c}}{2}=-\frac{b}{2}$$

$$y(x)=C_1e^{\frac{-b}{2}x}+C_2xe^{\frac{-b}{2}x}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} xe^{-\frac{b}{2}x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^{\frac{b}{2}x}}=0 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} y(x)=0.$$

例. 设$y=y(x)$是微分方程$y''+by'+cy=0$的解，

其中b,c为正常数，则$\lim\limits_{x\to+\infty} y(x)$(　　).

A. 与解的初值$y(0),y'(0)$有关，与b,c无关;

B. 与解的初值$y(0),y'(0)$及b,c都无关;

C. 与解的初值$y(0),y'(0)$及c无关，只与b有关;

D. 与解的初值$y(0),y'(0)$及b无关，只与c有关.

分析:3)若特征方程有两复根

$$\lambda=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4c}}{2}=\frac{-b\pm i\sqrt{4c-b^2}}{2}$$

$$y(x)=C_1e^{\frac{-b}{2}x}\cos\frac{\sqrt{4c-b^2}}{2}x+C_2e^{\frac{-b}{2}x}\sin\frac{\sqrt{4c-b^2}}{2}x$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to+\infty} y(x)=0.$$

例1. 求方程$y''-5y'+6y=(x+1)e^{4x}$的特解.

解：特征方程$\lambda^2-5\lambda+6=0$, 特征根为$\lambda_1=2, \lambda_2=3$

由于4不是方程特征根，

故设特解为$y^*=(ax+b)e^{4x}$

例2. 求方程$y''+y'=x-2+3e^{2x}$的特解.

解：特征方程$\lambda^2+\lambda=0$, 特征根为$\lambda_1=0$, $\lambda_2=-1$

由于0是方程1重特征根，2不是方程特征根.

故设特解为$y^*=x(ax+b)+ce^{2x}$

例3. 求方程$y''-y=\sin x$的通解.

解：特征方程$\lambda^2-1=0$，特征根为$\lambda_1=1,\lambda_2=-1$

故齐次方程通解为$y=C_1e^x+C_2e^{-x}$

又$\alpha\pm i\beta=\pm i$不是方程特征根，

故设特解$y^*=a\cos x+b\sin x$

$$y^{*\prime}=-a\sin x+b\cos x$$

$$y^{*\prime\prime}=-a\cos x-b\sin x$$

代入，得$-a\cos x-b\sin x-a\cos x-b\sin x=\sin x$

$$\Rightarrow a=0,b=-\frac{1}{2}$$

故通解为$y=C_1e^x+C_2e^{-x}-\dfrac{1}{2}\sin x$

例. 求方程$x^2y''+4xy'+2y=\dfrac{1}{x}$的通解.

解： 做变换$x=e^t$, 原方程化为

规律： $x^n y^{(n)}$
$=D(D-1)\cdots(D-n+1)y$

$$\left[D(D-1)+4D+2\right]y=e^{-t},$$

$$\Rightarrow\left[D^2+3D+2\right]y=e^{-t},$$

特征方程为$\lambda^2+3\lambda+2=0$，特征根$\lambda_1=-1$， $\lambda_2=-2$

设特解$y^*=ate^{-t}$， $y^{*\prime}=ae^{-t}-ate^{-t}$,

$y^{*\prime\prime}=-ae^{-t}-ae^{-t}+ate^{-t}$，代入方程,

$$-ae^{-t}-ae^{-t}+ate^{-t}+3\left(ae^{-t}-ate^{-t}\right)+2ate^{-t}=e^{-t}$$

$\Rightarrow a=1$，故特解$y^*=te^{-t}$

通解$y=C_1e^{-t}+C_2e^{-2t}+te^{-t}=\dfrac{C_1}{x}+\dfrac{C_2}{x^2}+\dfrac{\ln x}{x}$