微分方程（一）

一、全微分方程及积分因子

一、全微分方程及积分因子

定义 1 一个一阶微分方程写成

$$P(x, y)\mathrm{d}x + Q(x, y)\mathrm{d}y = 0 \tag{1}$$

形式后，如果存在某个函数 $u = u(x, y)$ 使得：

$$\mathrm{d}u(x, y) = P(x, y)\mathrm{d}x + Q(x, y)\mathrm{d}y \text{ ,}$$

那么方程 (1) 就叫做全微分方程.

一、全微分方程及积分因子

定义 1 一个一阶微分方程写成

$$P(x, y)\mathrm{d}x + Q(x, y)\mathrm{d}y = 0 \tag{1}$$

形式后，如果存在某个函数 $u = u(x, y)$ 使得：

$$\mathrm{d}u(x, y) = P(x, y)\mathrm{d}x + Q(x, y)\mathrm{d}y ,$$

那么方程 (1) 就叫做全微分方程.

方程通解：$u(x, y) = C$.

全微分方程的判定：当 $P(x,y)$、$Q(x,y)$ 在单连通区域 D 内具有一阶连续偏导数。则方程 (1) 为全微分方程的充分必要条件为

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

全微分方程的判定：当 $P(x, y)$、$Q(x, y)$ 在单连通区域 D 内具有一阶连续偏导数。则方程 (1) 为全微分方程的充分必要条件为

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

例 1　求解 $(3x^2 + y\cos x)\mathrm{d}x + (\sin x - 4y^3)\mathrm{d}y = 0.$

全微分方程的判定：当 $P(x,y)$、$Q(x,y)$ 在单连通区域 D 内具有一阶连续偏导数。则方程 (1) 为全微分方程的充分必要条件为

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

例 1 求解 $(3x^2+y\cos x)\mathrm{d}x+(\sin x-4y^3)\mathrm{d}y=0$.

解 方程通解为 $x^3+y\sin x-y^4=C$.

全微分方程的判定：当 $P(x,y)$、$Q(x,y)$ 在单连通区域 D 内具有一阶连续偏导数。则方程 (1) 为全微分方程的充分必要条件为

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

例 1　求解 $(3x^2+y\cos x)\mathrm{d}x+(\sin x-4y^3)\mathrm{d}y=0.$

解　方程通解为 $x^3+y\sin x-y^4=C.$

例 2　求解 $(1+\mathrm{e}^{2\theta})\mathrm{d}\rho+2\rho\mathrm{e}^{2\theta}\mathrm{d}\theta=0.$

全微分方程的判定：当 $P(x,y)$、$Q(x,y)$ 在单连通区域 D 内具有一阶连续偏导数。则方程 (1) 为全微分方程的充分必要条件为

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

例 1 求解 $(3x^2 + y\cos x)\mathrm{d}x + (\sin x - 4y^3)\mathrm{d}y = 0.$

解 方程通解为 $x^3 + y\sin x - y^4 = C.$

例 2 求解 $(1 + \mathrm{e}^{2\theta})\mathrm{d}\rho + 2\rho\mathrm{e}^{2\theta}\mathrm{d}\theta = 0.$

解 方程通解为 $(1 + \mathrm{e}^{2\theta})\rho = C.$

给定微分方程

$$P(x, y)\mathrm{d}x + Q(x, y)\mathrm{d}y = 0,$$

给定微分方程

$$P(x, y)\mathrm{d}x + Q(x, y)\mathrm{d}y = 0, \tag{2}$$

当 $\dfrac{\partial P}{\partial y} \neq \dfrac{\partial Q}{\partial x}$ 时，方程 (2) 不是全微分方程。

给定微分方程

$$P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = 0, \tag{2}$$

当 $\dfrac{\partial P}{\partial y} \neq \dfrac{\partial Q}{\partial x}$ 时，方程 (2) 不是全微分方程。此时若有非零函数 $\mu(x,y)$ 使得

$$\mu P\mathrm{d}x + \mu Q\mathrm{d}y = 0$$

为全微分方程，则称 μ 为方程 (2) 的积分因子。

找积分因子的几个思路：

找积分因子的几个思路：

(1) 若方程含有 $y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y$，则可考虑积分因子

$$\frac{1}{x^2},\quad \frac{1}{y^2},\quad \frac{1}{xy},\quad \frac{1}{x^2-y^2},\quad \frac{1}{x^2+y^2}.$$

找积分因子的几个思路:

(1) 若方程含有 $y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y$，则可考虑积分因子

$$\frac{1}{x^2},\quad \frac{1}{y^2},\quad \frac{1}{xy},\quad \frac{1}{x^2-y^2},\quad \frac{1}{x^2+y^2}.$$

$$\frac{y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y}{x^2} = -\mathrm{d}\left(\frac{y}{x}\right),$$

找积分因子的几个思路：

(1) 若方程含有 $y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y$，则可考虑积分因子

$$\frac{1}{x^2},\quad \frac{1}{y^2},\quad \frac{1}{xy},\quad \frac{1}{x^2-y^2},\quad \frac{1}{x^2+y^2}.$$

$$\frac{y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y}{x^2} = -\mathrm{d}\left(\frac{y}{x}\right), \qquad \frac{y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y}{y^2} = \mathrm{d}\left(\frac{x}{y}\right),$$

找积分因子的几个思路：

(1) 若方程含有 $y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y$，则可考虑积分因子

$$\frac{1}{x^2},\quad \frac{1}{y^2},\quad \frac{1}{xy},\quad \frac{1}{x^2-y^2},\quad \frac{1}{x^2+y^2}.$$

$$\frac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{x^2}=-\mathrm{d}\left(\frac{y}{x}\right),\qquad \frac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{y^2}=\mathrm{d}\left(\frac{x}{y}\right),$$

$$\frac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{xy}=\mathrm{d}\left(\ln|x|-\ln|y|\right),$$

找积分因子的几个思路：

(1) 若方程含有 $y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y$，则可考虑积分因子

$$\frac{1}{x^2},\quad \frac{1}{y^2},\quad \frac{1}{xy},\quad \frac{1}{x^2-y^2},\quad \frac{1}{x^2+y^2}.$$

$$\frac{y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y}{x^2} = -\mathrm{d}\left(\frac{y}{x}\right),\qquad \frac{y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y}{y^2} = \mathrm{d}\left(\frac{x}{y}\right),$$

$$\frac{y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y}{xy} = \mathrm{d}\big(\ln|x| - \ln|y|\big),$$

$$\frac{y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y}{x^2-y^2} = \frac{1}{2}\mathrm{d}\ln\left|\frac{x-y}{x+y}\right|,$$

找积分因子的几个思路：

(1) 若方程含有 $y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y$，则可考虑积分因子

$$\frac{1}{x^2},\quad \frac{1}{y^2},\quad \frac{1}{xy},\quad \frac{1}{x^2-y^2},\quad \frac{1}{x^2+y^2}.$$

$$\frac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{x^2}=-\mathrm{d}\left(\frac{y}{x}\right),\qquad \frac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{y^2}=\mathrm{d}\left(\frac{x}{y}\right),$$

$$\frac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{xy}=\mathrm{d}\big(\ln|x|-\ln|y|\big),$$

$$\frac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{x^2-y^2}=\frac{1}{2}\mathrm{d}\ln\left|\frac{x-y}{x+y}\right|,\qquad \frac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{x^2+y^2}=\mathrm{d}\arctan\frac{x}{y}.$$

(2) 若方程含有 $x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y$，则可考虑积分因子 $\dfrac{1}{(x^2+y^2)^n}$,

(2) 若方程含有 $x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y$，则可考虑积分因子 $\dfrac{1}{(x^2+y^2)^n}$，

$$\frac{x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y}{(x^2+y^2)^n} = \begin{cases} \frac{1}{2}\mathrm{d}\ln(x^2+y^2) & n=1, \\ \frac{1}{2(1-n)}\mathrm{d}(x^2+y^2)^{1-n} & n>1. \end{cases}$$

(2) 若方程含有 $x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y$，则可考虑积分因子 $\dfrac{1}{(x^2+y^2)^n}$,

$$\frac{x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y}{(x^2+y^2)^n}=\begin{cases}\frac{1}{2}\mathrm{d}\ln(x^2+y^2) & n=1,\\ \frac{1}{2(1-n)}\mathrm{d}(x^2+y^2)^{1-n} & n>1.\end{cases}$$

(3) 若方程含有 $x\mathrm{d}y+y\mathrm{d}x$，则可考虑积分因子 $\dfrac{1}{(xy)^n}$,

(2) 若方程含有 $x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y$，则可考虑积分因子 $\dfrac{1}{(x^2+y^2)^n}$，

$$\frac{x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y}{(x^2+y^2)^n}=\begin{cases}\frac{1}{2}\mathrm{d}\ln(x^2+y^2) & n=1,\\ \frac{1}{2(1-n)}\mathrm{d}(x^2+y^2)^{1-n} & n>1.\end{cases}$$

(3) 若方程含有 $x\mathrm{d}y+y\mathrm{d}x$，则可考虑积分因子 $\dfrac{1}{(xy)^n}$，

$$\frac{x\mathrm{d}y+y\mathrm{d}x}{(xy)^n}=\begin{cases}\mathrm{d}\ln|xy| & n=1,\\ \frac{1}{1-n}\mathrm{d}(xy)^{1-n} & n>1.\end{cases}$$

例 3　求微分方程

$$y(y+1)\,\mathrm{d}x+\left(x(y+1)+x^2y^2\right)\mathrm{d}y=0$$

的通解。

例 3　求微分方程

$$y(y+1)\,\mathrm{d}x+\left(x(y+1)+x^2y^2\right)\mathrm{d}y=0$$

的通解。

解　此微分方程的通解为：$y+1=C\mathrm{e}^{\frac{1}{xy}}$.

例 3　求微分方程

$$y(y+1)\,\mathrm{d}x+\left(x(y+1)+x^2y^2\right)\mathrm{d}y=0$$

的通解。

解　此微分方程的通解为：$y+1=C\mathrm{e}^{\frac{1}{xy}}$.

例 4　求微分方程

$$(x^2-y^2-2y)\,\mathrm{d}x+(x^2+2x-y^2)\,\mathrm{d}y=0$$

的通解。

例 3　求微分方程

$$y(y+1)\,\mathrm{d}x+\big(x(y+1)+x^2y^2\big)\,\mathrm{d}y=0$$

的通解。

解　此微分方程的通解为：$y+1=C\mathrm{e}^{\frac{1}{xy}}$.

例 4　求微分方程

$$(x^2-y^2-2y)\,\mathrm{d}x+(x^2+2x-y^2)\,\mathrm{d}y=0$$

的通解。

解　所求方程的通解为 $\dfrac{x-y}{x+y}=C\mathrm{e}^{x+y}$.

例 5　求微分方程

$$(5xy - 3y^3)\,\mathrm{d}x + (3x^2 - 7xy^2)\,\mathrm{d}y = 0$$

的通解。

例 5　求微分方程

$$(5xy-3y^3)\,\mathrm{d}x+(3x^2-7xy^2)\,\mathrm{d}y=0$$

的通解。

解　所求方程的通解为 $\sqrt{x^5y^3}-\sqrt{x^3y^7}=C$.

二、常系数非齐次线性方程的算子解法

二、常系数非齐次线性方程的算子解法

（1）算子多项式

对于函数 $y=y(x)$,

二、常系数非齐次线性方程的算子解法

（1）算子多项式

对于函数 $y = y(x)$，定义

$D^0 = 1,$

二、常系数非齐次线性方程的算子解法

（1）算子多项式

对于函数 $y=y(x)$，定义

$D^0=1,\qquad D^0y=y^{(0)}=y;$

二、常系数非齐次线性方程的算子解法

（1）算子多项式

对于函数 $y = y(x)$，定义

$D^0 = 1,$ $\qquad$ $D^0 y = y^{(0)} = y;$

$$D^1 = D = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x},$$

二、常系数非齐次线性方程的算子解法

（1）算子多项式

对于函数 $y = y(x)$，定义

$$D^0 = 1, \qquad D^0 y = y^{(0)} = y;$$

$$D^1 = D = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}, \qquad Dy = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y';$$

二、常系数非齐次线性方程的算子解法

（1）算子多项式

对于函数 $y = y(x)$，定义

$$D^0 = 1, \qquad D^0 y = y^{(0)} = y;$$

$$D^1 = D = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}, \qquad Dy = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y';$$

$$D^2 = DD = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2},$$

二、常系数非齐次线性方程的算子解法

（1）算子多项式

对于函数 $y=y(x)$，定义

$$D^0=1, \qquad D^0y=y^{(0)}=y;$$

$$D^1=D=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}, \qquad Dy=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=y';$$

$$D^2=DD=\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}, \qquad D^2y=\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=y'';$$

二、常系数非齐次线性方程的算子解法

（1）算子多项式

对于函数 $y=y(x)$，定义

$$D^0=1, \qquad D^0y=y^{(0)}=y;$$

$$D^1=D=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}, \qquad Dy=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=y';$$

$$D^2=DD=\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}, \qquad D^2y=\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=y'';$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$D^n=D^{n-1}D=\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n},$$

二、常系数非齐次线性方程的算子解法

（1）算子多项式

对于函数 $y=y(x)$，定义

$$D^0=1, \qquad D^0y=y^{(0)}=y;$$

$$D^1=D=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}, \qquad Dy=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=y';$$

$$D^2=DD=\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}, \qquad D^2y=\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=y'';$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$D^n=D^{n-1}D=\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}, \qquad D^ny=\frac{\mathrm{d}^ny}{\mathrm{d}x^n}=y^{(n)}.$$

记 $f(D)=a_0D^n+a_1D^{n-1}+\cdots+a_{n-1}D+a_n$，称为形式算子多项式。

记 $f(D)=a_0D^n+a_1D^{n-1}+\cdots+a_{n-1}D+a_n$，称为形式算子多项式。对于函数 $y=y(x)$，规定

$$f(D)y=a_0D^ny+a_1D^{n-1}y+\cdots+a_{n-1}Dy+a_ny$$

记 $f(D)=a_0D^n+a_1D^{n-1}+\cdots+a_{n-1}D+a_n$，称为形式算子多项式。对于函数 $y=y(x)$，规定

$$\begin{aligned}f(D)y&=a_0D^ny+a_1D^{n-1}y+\cdots+a_{n-1}Dy+a_ny\\&=a_0y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}y'+a_ny.\end{aligned}$$

记 $f(D)=a_0D^n+a_1D^{n-1}+\cdots+a_{n-1}D+a_n$，称为形式算子多项式。对于函数 $y=y(x)$，规定

$$
\begin{aligned}
f(D)y &= a_0D^ny+a_1D^{n-1}y+\cdots+a_{n-1}Dy+a_ny \\
&= a_0y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}y'+a_ny.
\end{aligned}
$$

利用算子多项式，可以简化常系数线性微分方程的写法。

记 $f(D)=a_0D^n+a_1D^{n-1}+\cdots+a_{n-1}D+a_n$，称为形式算子多项式。对于函数 $y=y(x)$，规定

$$f(D)y=a_0D^ny+a_1D^{n-1}y+\cdots+a_{n-1}Dy+a_ny$$
$$=a_0y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}y'+a_ny.$$

利用算子多项式，可以简化常系数线性微分方程的写法。如方程 $y''-2y'-3y=x^2\mathrm{e}^x$ 可写成

记 $f(D)=a_0D^n+a_1D^{n-1}+\cdots+a_{n-1}D+a_n$，称为形式算子多项式。对于函数 $y=y(x)$，规定

$$f(D)y=a_0D^ny+a_1D^{n-1}y+\cdots+a_{n-1}Dy+a_ny$$
$$=a_0y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}y'+a_ny.$$

利用算子多项式，可以简化常系数线性微分方程的写法。如方程 $y''-2y'-3y=x^2\mathrm{e}^x$ 可写成 $(D^2-2D-3)y=x^2\mathrm{e}^x$；

记 $f(D)=a_0D^n+a_1D^{n-1}+\cdots+a_{n-1}D+a_n$，称为形式算子多项式。对于函数 $y=y(x)$，规定

$$
\begin{aligned}
f(D)y &= a_0D^ny+a_1D^{n-1}y+\cdots+a_{n-1}Dy+a_ny \\
&= a_0y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}y'+a_ny.
\end{aligned}
$$

利用算子多项式，可以简化常系数线性微分方程的写法。如方程 $y''-2y'-3y=x^2\mathrm{e}^x$ 可写成 $(D^2-2D-3)y=x^2\mathrm{e}^x$；又如方程 $y''+y=\mathrm{e}^x\sin x$ 可写成 $(D^2+1)y=\mathrm{e}^x\sin x$.

（2）算子多项式的运算 两个算子多项式 $f(D)$、$g(D)$ 的加法和乘法定义如下

（2）算子多项式的运算 两个算子多项式 $f(D)$、$g(D)$ 的加法和乘法定义如下

$$\big(f(D) \pm g(D)\big)y = f(D)y \pm g(D)y\ ,$$

（2）算子多项式的运算 两个算子多项式 $f(D)$、$g(D)$ 的加法和乘法定义如下

$$\big(f(D) \pm g(D)\big)y = f(D)y \pm g(D)y\,,$$

$$\big(f(D)g(D)\big)y = f(D)\big(g(D)y\big)\,.$$

（2）算子多项式的运算 两个算子多项式 $f(D)$、$g(D)$ 的加法和乘法定义如下

$$\big(f(D) \pm g(D)\big)y = f(D)y \pm g(D)y\,,$$

$$\big(f(D)g(D)\big)y = f(D)\big(g(D)y\big)\,.$$

算子多项式也可以做因式分解，如

$$f(D) = D^2 - 2D - 3 = (D-3)(D+1)\,.$$

（2）算子多项式的运算 两个算子多项式 $f(D)$、$g(D)$ 的加法和乘法定义如下

$$\big(f(D) \pm g(D)\big)y = f(D)y \pm g(D)y\,,$$

$$\big(f(D)g(D)\big)y = f(D)\big(g(D)y\big)\,.$$

算子多项式也可以做因式分解，如

$$f(D) = D^2 - 2D - 3 = (D-3)(D+1)\,.$$

则对任意函数 $y = y(x)$，$f(D)y = y'' - 2y' - 3y$，

（2）算子多项式的运算 两个算子多项式 $f(D)$、$g(D)$ 的加法和乘法定义如下

$$\big(f(D) \pm g(D)\big)y = f(D)y \pm g(D)y\,,$$

$$\big(f(D)g(D)\big)y = f(D)\big(g(D)y\big)\,.$$

算子多项式也可以做因式分解，如

$$f(D) = D^2 - 2D - 3 = (D-3)(D+1)\,.$$

则对任意函数 $y = y(x)$，$f(D)y = y'' - 2y' - 3y$，亦有

$$(D-3)(D+1)y$$

（2）算子多项式的运算 两个算子多项式 $f(D)$、$g(D)$ 的加法和乘法定义如下

$$\big(f(D) \pm g(D)\big)y = f(D)y \pm g(D)y\,,$$

$$\big(f(D)g(D)\big)y = f(D)\big(g(D)y\big)\,.$$

算子多项式也可以做因式分解，如

$$f(D) = D^2 - 2D - 3 = (D-3)(D+1)\,.$$

则对任意函数 $y = y(x)$，$f(D)y = y'' - 2y' - 3y$，亦有

$$(D-3)(D+1)y = (D-3)\big((D+1)y\big)$$

（2）算子多项式的运算 两个算子多项式 $f(D)$、$g(D)$ 的加法和乘法定义如下

$$\big(f(D) \pm g(D)\big)y = f(D)y \pm g(D)y\,,$$

$$\big(f(D)g(D)\big)y = f(D)\big(g(D)y\big)\,.$$

算子多项式也可以做因式分解，如

$$f(D) = D^2 - 2D - 3 = (D-3)(D+1)\,.$$

则对任意函数 $y = y(x)$，$f(D)y = y'' - 2y' - 3y$，亦有

$$\begin{aligned}(D-3)(D+1)y &= (D-3)\big((D+1)y\big)\\ &= (D-3)(y'+y)\end{aligned}$$

（2）算子多项式的运算 两个算子多项式 $f(D)$、$g(D)$ 的加法和乘法定义如下

$$\big(f(D) \pm g(D)\big)y = f(D)y \pm g(D)y,$$

$$\big(f(D)g(D)\big)y = f(D)\big(g(D)y\big).$$

算子多项式也可以做因式分解，如

$$f(D) = D^2 - 2D - 3 = (D-3)(D+1).$$

则对任意函数 $y = y(x)$，$f(D)y = y'' - 2y' - 3y$，亦有

$$\begin{aligned}(D-3)(D+1)y &= (D-3)\big((D+1)y\big)\\ &= (D-3)(y'+y)\\ &= y'' - 2y' - 3y.\end{aligned}$$

（3）逆算子 如果 $f(D)$ 是算子多项式，如果 $f(D)\varphi(x)=\psi(x)$，则记 $\dfrac{1}{f(D)}\psi(x)=\varphi(x)$；

（3）逆算子 如果 $f(D)$ 是算子多项式，如果 $f(D)\varphi(x)$ $\psi(x)$，则记 $\dfrac{1}{f(D)}\psi(x)=\varphi(x)$；称算子 $\dfrac{1}{f(D)}$ 为 $f(D)$ 的**逆算子**。

（3）逆算子 如果 $f(D)$ 是算子多项式，如果 $f(D)\varphi(x)=\psi(x)$，则记 $\dfrac{1}{f(D)}\psi(x)=\varphi(x)$；称算子 $\dfrac{1}{f(D)}$ 为 $f(D)$ 的逆算子。可以将它看成解方程 $f(D)\varphi(x)=\psi(x)$ 中的形式“除法”。

（3）逆算子 如果 $f(D)$ 是算子多项式，如果 $f(D)\varphi(x)=\psi(x)$，则记 $\dfrac{1}{f(D)}\psi(x)=\varphi(x)$；称算子 $\dfrac{1}{f(D)}$ 为 $f(D)$ 的逆算子。可以将它看成解方程 $f(D)\varphi(x)=\psi(x)$ 中的形式“除法”。

我们有 $\dfrac{1}{D}\psi(x)=\int\psi(x)\,\mathrm{d}x$，

（3）逆算子 如果 $f(D)$ 是算子多项式，如果 $f(D)\varphi(x)=\psi(x)$，则记 $\frac{1}{f(D)}\psi(x)=\varphi(x)$；称算子 $\frac{1}{f(D)}$ 为 $f(D)$ 的逆算子。可以将它看成解方程 $f(D)\varphi(x)=\psi(x)$ 中的形式"除法"。

我们有 $\frac{1}{D}\psi(x)=\int\psi(x)\,\mathrm{d}x$，

$\frac{1}{D^n}\psi(x)=\int\cdots\int\psi(x)\,\mathrm{d}x\cdots\mathrm{d}x$（$n$ 次积分）。

为了计算逆算子，有时需要放在复值函数中考虑。

为了计算逆算子，有时需要放在复值函数中考虑。设 E 是一个实系数算子多项式或者它的逆算子，

为了计算逆算子，有时需要放在复值函数中考虑。

设 E 是一个实系数算子多项式或者它的逆算子，$u(x)$、是实函数，

为了计算逆算子，有时需要放在复值函数中考虑。

设 E 是一个实系数算子多项式或者它的逆算子，$u(x)$、是实函数，分别用 $\mathrm{Re}\,z$、$\mathrm{Im}\,z$ 表示复数 z 的实部和虚部，

为了计算逆算子，有时需要放在复值函数中考虑。

设 E 是一个实系数算子多项式或者它的逆算子，$u(x)$、是实函数，分别用 $\operatorname{Re} z$、$\operatorname{Im} z$ 表示复数 z 的实部和虚部，则

$$E\operatorname{Re}\big(u(x)+\mathrm{i}v(x)\big)=\operatorname{Re}\Big(E\big(u(x)+\mathrm{i}v(x)\big)\Big),$$

为了计算逆算子，有时需要放在复值函数中考虑。

设 E 是一个实系数算子多项式或者它的逆算子，$u(x)$、是实函数，分别用 $\mathrm{Re}\, z$、$\mathrm{Im}\, z$ 表示复数 z 的实部和虚部，则

$$E\,\mathrm{Re}\big(u(x)+\mathrm{i}v(x)\big)=\mathrm{Re}\Big(E\big(u(x)+\mathrm{i}v(x)\big)\Big),$$

$$E\,\mathrm{Im}\big(u(x)+\mathrm{i}v(x)\big)=\mathrm{Im}\Big(E\big(u(x)+\mathrm{i}v(x)\big)\Big).$$

设 $f(D)$ 是一个算子多项式，记 $f(D) = D^k g(D)$，其中 $g(D)$ 的常数项不为零。

设 $f(D)$ 是一个算子多项式，记 $f(D) = D^k g(D)$，其中 $g(D)$ 的常数项不为零。则对函数 $y = y(x)$，我们有

$$\frac{1}{f(D)}y = \frac{1}{D^k}\left(\frac{1}{g(D)}y\right) = \frac{1}{g(D)}\left(\frac{1}{D^k}y\right).$$

设 $f(D)$ 是一个算子多项式，记 $f(D)=D^k g(D)$，其中 $g(D)$ 的常数项不为零。则对函数 $y=y(x)$，我们有

$$\frac{1}{f(D)}y=\frac{1}{D^k}\left(\frac{1}{g(D)}y\right)=\frac{1}{g(D)}\left(\frac{1}{D^k}y\right).$$

而逆算子 $\dfrac{1}{g(D)}$ 可用形式幂级数来计算。

设 $f(D)$ 是常数项不为零的算子多项式，

设 $f(D)$ 是常数项不为零的算子多项式，则 $\dfrac{1}{f(D)}$ 可以（唯一地）展开为形式幂级数

$$\frac{1}{f(D)}=b_0+b_1D+b_2D^2+\cdots+b_nD^n+\cdots.$$

设 $f(D)$ 是常数项不为零的算子多项式，则 $\dfrac{1}{f(D)}$ 可以（唯一地）展开为形式幂级数

$$\frac{1}{f(D)} = b_0 + b_1 D + b_2 D^2 + \cdots + b_n D^n + \cdots.$$

设 $P_m(x)$ 是 m 次多项式，则

$$\frac{1}{f(D)} P_m(x) = (b_0 + b_1 D + \cdots + b_m D^m) P_m(x).$$

设 $f(D)$ 是常数项不为零的算子多项式，则 $\dfrac{1}{f(D)}$ 可以（唯一地）展开为形式幂级数

$$\frac{1}{f(D)} = b_0 + b_1 D + b_2 D^2 + \cdots + b_n D^n + \cdots .$$

设 $P_m(x)$ 是 m 次多项式，则

$$\frac{1}{f(D)} P_m(x) = (b_0 + b_1 D + \cdots + b_m D^m) P_m(x) .$$

性质　设 λ 为一复常数，$v(x)$ 是复值函数。

设 $f(D)$ 是常数项不为零的算子多项式，则 $\dfrac{1}{f(D)}$ 可以（唯一地）展开为形式幂级数

$$\frac{1}{f(D)} = b_0 + b_1 D + b_2 D^2 + \cdots + b_n D^n + \cdots .$$

设 $P_m(x)$ 是 m 次多项式，则

$$\frac{1}{f(D)} P_m(x) = (b_0 + b_1 D + \cdots + b_m D^m) P_m(x) .$$

性质 设 λ 为一复常数，$v(x)$ 是复值函数。则有公式

$$\frac{1}{f(D)}\left(\mathrm{e}^{\lambda x} v(x)\right) = \mathrm{e}^{\lambda x} \frac{1}{f(D+\lambda)} v(x) .$$

例 6　求下列微分方程的通解：

① $y'' - 3y' + 2y = x^2 + x + 1$；

② $y'' + 2y' = 3x^2 + 1$.

例 6　求下列微分方程的通解：

① $y'' - 3y' + 2y = x^2 + x + 1$；

② $y'' + 2y' = 3x^2 + 1$.

解　① $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + \frac{1}{2}x^2 + 2x + 3$.

例 6　求下列微分方程的通解：

① $y'' - 3y' + 2y = x^2 + x + 1$；

② $y'' + 2y' = 3x^2 + 1$.

解　① $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + \frac{1}{2}x^2 + 2x + 3$.

② $y = C_1 e^{2x} + \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{5}{4}x + C_2$.

例 6　求下列微分方程的通解：

① $y'' - 3y' + 2y = x^2 + x + 1$；

② $y'' + 2y' = 3x^2 + 1$.

解　① $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + \frac{1}{2}x^2 + 2x + 3$.

② $y = C_1 e^{2x} + \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{5}{4}x + C_2$.

例 7　求微分方程 $y'' - 2y' + 2y = x^2 e^x \cos x$ 的通解。

例 6　求下列微分方程的通解：

① $y'' - 3y' + 2y = x^2 + x + 1$；

② $y'' + 2y' = 3x^2 + 1$.

解　① $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + \frac{1}{2}x^2 + 2x + 3$.

② $y = C_1 e^{2x} + \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{5}{4}x + C_2$.

例 7　求微分方程 $y'' - 2y' + 2y = x^2 e^x \cos x$ 的通解。

解　原方程的通解为：

$$y = e^x\left(\left(\frac{1}{4}x^2 + C_1\right)\cos x + \left(\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{4}x + C_2\right)\sin x\right).$$

例 8 求微分方程 $y'' - 4y' + 4y = \dfrac{x\mathrm{e}^{2x}}{1+x^2}$ 的通解。

例 8　求微分方程 $y'' - 4y' + 4y = \dfrac{xe^{2x}}{1+x^2}$ 的通解。

解　原方程的通解为 $y = e^{2x}\left(\frac{x}{2}\ln(1+x^2) + \arctan x + C_1x + C_2\right)$.

三、欧拉方程

三、欧拉方程

定义　形如

$$x^n y^{(n)} + p_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1} x y' + p_n y = f(x)$$

的线性方程称为欧拉方程，其中 $p_1, p_2, \ldots, p_n$ 都是常数。

三、欧拉方程

定义 形如

$$x^n y^{(n)} + p_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1} x y' + p_n y = f(x)$$

的线性方程称为欧拉方程，其中 $p_1, p_2, \ldots, p_n$ 都是常数。

解法：做代换 $x = \mathrm{e}^t$，记 $D_t = D = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$,

三、欧拉方程

定义 形如

$$x^n y^{(n)} + p_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1} x y' + p_n y = f(x)$$

的线性方程称为欧拉方程，其中 $p_1, p_2, \ldots, p_n$ 都是常数。

解法：做代换 $x = \mathrm{e}^t$，记 $D_t = D = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$，则有

$$x^k y^{(k)} = D_t(D_t - 1)\cdots(D_t - k + 1)y, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

于是欧拉方程可化为常系数线性微分方程。

例 9　求微分方程 $x^3y''' + 2x^2y'' + xy' - y = x^2 - x + 2$ 的通解。

例 9　求微分方程 $x^3y'''+2x^2y''+xy'-y=x^2-x+2$ 的通解。

解　原方程的通解为：

$$y=C_1\cos\ln x+C_2\sin\ln x+C_3x+\frac{1}{5}x^2-\frac{1}{2}x\ln x-2.$$

四、利用常数变易法求二阶线性微分方程的解

四、利用常数变易法求二阶线性微分方程的解

设 $p(x)$、$q(x)$、$f(x)$ 均为连续函数。给定二阶线性非齐次微分方程

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x). \tag{3}$$

四、利用常数变易法求二阶线性微分方程的解

设 $p(x)$、$q(x)$、$f(x)$ 均为连续函数。给定二阶线性非齐次微分方程

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x). \tag{3}$$

对应的齐次方程为

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0. \tag{4}$$

① 若可以猜出齐次方程 (4) 的一个解 $y = y_1(x)$.

① 若可以猜出齐次方程 (4) 的一个解 $y=y_1(x)$. 则可作代换 $y=y_1(x)u$,

① 若可以猜出齐次方程 (4) 的一个解 $y = y_1(x)$. 则可作代换 $y = y_1(x)u$，代入非齐次方程 (3) 并化简

① 若可以猜出齐次方程 (4) 的一个解 $y = y_1(x)$. 则可作代换 $y = y_1(x)u$，代入非齐次方程 (3) 并化简得：

$$y_1 u'' + \left(2y_1' + p(x)y_1\right)u' = f(x)\,.$$

① 若可以猜出齐次方程 (4) 的一个解 $y = y_1(x)$. 则可作代换 $y = y_1(x)u$，代入非齐次方程 (3) 并化简得：

$$y_1u'' + \left(2y_1' + p(x)y_1\right)u' = f(x)\,.$$

这是可降阶的高阶微分方程,

① 若可以猜出齐次方程 (4) 的一个解 $y = y_1(x)$. 则可作代换 $y = y_1(x)u$，代入非齐次方程 (3) 并化简得：

$$y_1 u'' + \left(2y_1' + p(x)y_1\right)u' = f(x)\,.$$

这是可降阶的高阶微分方程，令 $v = u'$，则方程变为一阶线性微分方程

$$y_1 v' + \left(2y_1' + p(x)y_1\right)v = f(x)\,.$$

① 若可以猜出齐次方程 (4) 的一个解 $y = y_1(x)$. 则可作代换 $y = y_1(x)u$，代入非齐次方程 (3) 并化简得：

$$y_1u'' + \big(2y_1' + p(x)y_1\big)u' = f(x)\,.$$

这是可降阶的高阶微分方程，令 $v = u'$，则方程变为一阶线性微分方程

$$y_1v' + \big(2y_1' + p(x)y_1\big)v = f(x)\,.$$

② 若未能猜出齐次方程 (4) 的解，可考虑令 $y = uv$，

① 若可以猜出齐次方程 (4) 的一个解 $y = y_1(x)$. 则可作代换 $y = y_1(x)u$，代入非齐次方程 (3) 并化简得：

$$y_1 u'' + \left(2y_1' + p(x)y_1\right)u' = f(x)\,.$$

这是可降阶的高阶微分方程，令 $v = u'$，则方程变为一阶线性微分方程

$$y_1 v' + \left(2y_1' + p(x)y_1\right)v = f(x)\,.$$

② 若未能猜出齐次方程 (4) 的解，可考虑令 $y = uv$，代入非齐次方程 (3) 得：

$$vu'' + \left(2v' + p(x)v\right)u' + \left(v'' + p(x)v' + q(x)v\right)u = f(x)\,.$$

① 若可以猜出齐次方程 (4) 的一个解 $y = y_1(x)$. 则可作代换 $y = y_1(x)u$，代入非齐次方程 (3) 并化简得：

$$y_1 u'' + \big(2y_1' + p(x)y_1\big)u' = f(x)\,.$$

这是可降阶的高阶微分方程，令 $v = u'$，则方程变为一阶线性微分方程

$$y_1 v' + \big(2y_1' + p(x)y_1\big)v = f(x)\,.$$

② 若未能猜出齐次方程 (4) 的解，可考虑令 $y = uv$，代入非齐次方程 (3) 得：

$$vu'' + \big(2v' + p(x)v\big)u' + \big(v'' + p(x)v' + q(x)v\big)u = f(x)\,.$$

然后考虑令 $2v' + p(x)v = 0$.

例 10　求微分方程 $(2x-1)y''-(2x+1)y'+2y=(4x^2-2x-1)\mathrm{e}^{2x}$ 的通解。

例 10 求微分方程 $(2x-1)y''-(2x+1)y'+2y=(4x^2-2x-1)e^{2x}$ 的通解。

解 此方程的通解为：$y=C_1(2x+1)+C_2e^x+(x-1)e^{2x}$.

例 10　求微分方程 $(2x-1)y''-(2x+1)y'+2y=(4x^2-2x-1)\mathrm{e}^{2x}$ 的通解。

解　此方程的通解为：$y=C_1(2x+1)+C_2\mathrm{e}^x+(x-1)\mathrm{e}^{2x}$.

例 11　求微分方程 $y''+\dfrac{2}{x}y'+y=2x-1$ 的通解。

例 10 求微分方程 $(2x-1)y''-(2x+1)y'+2y=(4x^2-2x-1)e^{2x}$ 的通解。

解 此方程的通解为：$y=C_1(2x+1)+C_2e^x+(x-1)e^{2x}$.

例 11 求微分方程 $y''+\dfrac{2}{x}y'+y=2x-1$ 的通解。

解 此方程的通解为：$y=\dfrac{C_1\cos x+C_2\sin x-4}{x}+2x-1$.

二阶非齐次线性方程的通解公式：

设 $p(x)$、$q(x)$、$f(x)$ 均为连续函数。给定二阶非齐次线性微分方程

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)\,. \tag{5}$$

二阶非齐次线性方程的通解公式：

设 $p(x)$、$q(x)$、$f(x)$ 均为连续函数。给定二阶非齐次线性微分方程

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)\,. \tag{5}$$

若已知对应的齐次方程

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \tag{6}$$

的两个线性无关的特解 $y_1(x)$、$y_2(x)$.

二阶非齐次线性方程的通解公式：

设 $p(x)$、$q(x)$、$f(x)$ 均为连续函数。给定二阶非齐次线性微分方程

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) . \tag{5}$$

若已知对应的齐次方程

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \tag{6}$$

的两个线性无关的特解 $y_1(x)$、$y_2(x)$. 则可令 $y = y_1(x)u_1(x) + y_2(x)u_2(x)$.

二阶非齐次线性方程的通解公式:

设 $p(x)$、$q(x)$、$f(x)$ 均为连续函数。给定二阶非齐次线性微分方程

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)\,. \tag{5}$$

若已知对应的齐次方程

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \tag{6}$$

的两个线性无关的特解 $y_1(x)$、$y_2(x)$. 则可令 $y = y_1(x)u_1(x) + y_2(x)u_2(x)$. 代入方程 (5) 中,

二阶非齐次线性方程的通解公式：

设 $p(x)$、$q(x)$、$f(x)$ 均为连续函数。给定二阶非齐次线性微分方程

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x). \tag{5}$$

若已知对应的齐次方程

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \tag{6}$$

的两个线性无关的特解 $y_1(x)$、$y_2(x)$. 则可令 $y = y_1(x)u_1(x) + y_2(x)u_2(x)$. 代入方程 (5) 中，可令

$$\begin{cases} y_1u_1' + y_2u_2' = 0, \\ y_1'u_1' + y_2'u_2' = f(x). \end{cases} \tag{7}$$

记

$$W(x) := \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$$

记

$$W(x) := \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_1' y_2 \neq 0.$$

记
$$W(x) := \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_1' y_2 \neq 0.$$
则方程组 (7) 的解为
$$u_1' = -\frac{y_2 f}{W}, \qquad u_2' = \frac{y_1 f}{W}.$$

记

$$W(x) := \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_1' y_2 \neq 0.$$

则方程组 (7) 的解为

$$u_1' = -\frac{y_2 f}{W}, \qquad u_2' = \frac{y_1 f}{W}.$$

于是非齐次线性方程 (5) 的一个特解为

$$y^* = -y_1 \int \frac{y_2 f}{W}\,\mathrm{d}x + y_2 \int \frac{y_1 f}{W}\,\mathrm{d}x.$$

记

$$W(x) := \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_1' y_2 \neq 0.$$

则方程组 (7) 的解为

$$u_1' = -\frac{y_2 f}{W}, \qquad u_2' = \frac{y_1 f}{W}.$$

于是非齐次线性方程 (5) 的一个特解为

$$y^* = -y_1 \int \frac{y_2 f}{W} \,\mathrm{d}x + y_2 \int \frac{y_1 f}{W} \,\mathrm{d}x .$$

非齐次线性方程 (5) 的通解为

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + y^*(x) .$$

若 x_0 为定义区间内的一点，

若 x_0 为定义区间内的一点，则方程 (5) 在初始条件 $y(x_0)=0$、$y'(x_0)=0$ 下的特解为

$$y^* = -y_1(x)\int_{x_0}^{x}\frac{y_2(t)f(t)}{W(t)}\mathrm{d}t + y_2(x)\int_{x_0}^{x}\frac{y_1(t)f(t)}{W(t)}\mathrm{d}t$$

若 x_0 为定义区间内的一点，则方程 (5) 在初始条件 $y(x_0)=0$、$y'(x_0)=0$ 下的特解为

$$
\begin{aligned}
y^* &= -y_1(x)\int_{x_0}^{x}\frac{y_2(t)f(t)}{W(t)}\,\mathrm{d}t + y_2(x)\int_{x_0}^{x}\frac{y_1(t)f(t)}{W(t)}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{x_0}^{x}\frac{W(x,t)f(t)}{W(t)}\,\mathrm{d}t\,,
\end{aligned}
$$

若 x_0 为定义区间内的一点，则方程 (5) 在初始条件 $y(x_0)=0$、$y'(x_0)=0$ 下的特解为

$$
\begin{aligned}
y^* &= -y_1(x)\int_{x_0}^{x}\frac{y_2(t)f(t)}{W(t)}\,\mathrm{d}t + y_2(x)\int_{x_0}^{x}\frac{y_1(t)f(t)}{W(t)}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{x_0}^{x}\frac{W(x,t)f(t)}{W(t)}\,\mathrm{d}t\,,
\end{aligned}
$$

其中

$$
W(x,t) := \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1(x) & y_2(x) \end{vmatrix}
$$

若 x_0 为定义区间内的一点，则方程 (5) 在初始条件 $y(x_0)=0$、$y'(x_0)=0$ 下的特解为

$$
\begin{aligned}
y^* &= -y_1(x)\int_{x_0}^{x}\frac{y_2(t)f(t)}{W(t)}\,\mathrm{d}t + y_2(x)\int_{x_0}^{x}\frac{y_1(t)f(t)}{W(t)}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{x_0}^{x}\frac{W(x,t)f(t)}{W(t)}\,\mathrm{d}t\,,
\end{aligned}
$$

其中

$$
W(x,t) := \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1(x) & y_2(x) \end{vmatrix} = y_1(t)y_2(x) - y_2(t)y_1(x)\,.
$$

例 12 求微分方程 $y'' + y = \sec x$ 的通解。

例 12　求微分方程 $y'' + y = \sec x$ 的通解。

解　此方程的通解为：$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + x \sin x + \cos x \ln|\cos x|$.

例 12　求微分方程 $y'' + y = \sec x$ 的通解。

解　此方程的通解为：$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + x \sin x + \cos x \ln|\cos x|$.

例 13　求微分方程 $y'' - 4y' + 4y = \dfrac{x\mathrm{e}^{2x}}{1 + x^2}$ 的通解。

例 12　求微分方程 $y'' + y = \sec x$ 的通解。

解　此方程的通解为：$y = C_1\cos x + C_2\sin x + x\sin x + \cos x\ln|\cos x|$.

例 13　求微分方程 $y'' - 4y' + 4y = \dfrac{xe^{2x}}{1+x^2}$ 的通解。

解　原方程的通解为 $y = e^{2x}\left(\frac{x}{2}\ln(1+x^2) + \arctan x + C_1x + C_2\right)$.

五、微分方程的幂级数解法

五、微分方程的幂级数解法

一阶微分方程的情形：

例 14 求方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y^2 + x^3$ 满足 $y|_{x=0} = \frac{1}{2}$ 的特解。

五、微分方程的幂级数解法

一阶微分方程的情形：

例 14 求方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y^2 + x^3$ 满足 $y|_{x=0} = \frac{1}{2}$ 的特解。

解 此方程的解为 $y = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$，

五、微分方程的幂级数解法

一阶微分方程的情形：

例 14 求方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y^2 + x^3$ 满足 $y|_{x=0} = \frac{1}{2}$ 的特解。

解 此方程的解为 $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$，其中 $a_0 = \frac{1}{2}$、$a_1 = \frac{1}{4}$、$a_2 = \frac{1}{8}$、$a_3 = \frac{1}{16}$、$a_4 = \frac{9}{32}$，

五、微分方程的幂级数解法

一阶微分方程的情形：

例 14　求方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=y^2+x^3$ 满足 $y|_{x=0}=\frac{1}{2}$ 的特解。

解　此方程的解为 $y=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$，其中 $a_0=\frac{1}{2}$、$a_1=\frac{1}{4}$、$a_2=\frac{1}{8}$、$a_3=\frac{1}{16}$、$a_4=\frac{9}{32}$，且当 $n\geqslant 4$ 时，$a_{n+1}=\dfrac{1}{n+1}\sum\limits_{k=0}^{n}a_ka_{n-k}$.

二阶微分方程的情形：

定理 设二阶齐次线性方程

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0.$$

其系数 $P(x)$ 与 $Q(x)$ 可在 $(-R, R)$ 内展开成 x 的幂级数，则在 $(-R, R)$ 内此方程必有形如 $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的解。

例 15 求微分方程 $y'' = xy$ 在初始条件 $y|_{x=0} = 0$、$y'|_{x=0} = 1$ 下的特解。

例 15 求微分方程 $y'' = xy$ 在初始条件 $y|_{x=0} = 0$、$y'|_{x=0} = 1$ 下的特解。

解 此方程的解为 $y = \sum\limits_{m=0}^{\infty} c_m x^{3m+1}$,

例 15　求微分方程 $y''=xy$ 在初始条件 $y|_{x=0}=0$、$y'|_{x=0}=1$ 下的特解。

解　此方程的解为 $y=\sum\limits_{m=0}^{\infty}c_m x^{3m+1}$，其中 $c_0=1$、$c_1=\dfrac{1}{3\cdot 4}$、$c_2=\dfrac{1}{(3\cdot 4)(6\cdot 7)}$、$\cdots$、

$c_m=\dfrac{1}{(3\cdot 4)(6\cdot 7)\cdots\big(3m\cdot(3m+1)\big)}$、$\cdots$.

例 16 求解 Legendre 方程

$$(1-x^2)y''-2xy'+n(n+1)y=0,$$

其中 n 为常数。

例 16　求解 Legendre 方程

$$(1-x^2)y''-2xy'+n(n+1)y=0,$$

其中 n 为常数。

解　此方程的通解为

$$y=C_1\left(1-\frac{n(n+1)}{2!}x^2+\frac{(n-2)n(n+1)(n+3)}{4!}x^4-\cdots\right)$$
$$+C_2\left(x-\frac{(n-1)(n+2)}{3!}x^3+\frac{(n-3)(n-1)(n+2)(n+4)}{5!}x^5-\cdots\right).$$