高等数学A

第1章 函数与极限

1.5 极限存在准则 两个重要极限

1.5.1 夹逼原理　　1.5.2 单调有界准则

1.5.3 Cauchy收敛准则　1.5.4 两个重要极限

中南大学开放式精品示范课堂高等数学建设组

1.5 极限存在准则 两个重要极限

极限存在准则 两个重要极限

- 1.5.1夹逼原理
  - 夹逼原理
  - 应用习例1-4
- 1.5.2 单调有界准则
  - 单调有界准则
  - 应用习例5
- 1.5.3 Cauchy收敛准则
  - Cauchy收敛准则
  - 应用习例
- 1.5.4 两个重要极限
  - 重要极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ 应用习例6-11
  - 重要极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=e$ 应用习例12-16

一、夹逼原理

定理1（夹逼原理-准则I）

在给定的变化过程中，如果$f(x),g(x),h(x)$满足

$$(1)\ g(x) \le f(x) \le h(x)$$

$$(2)\ \lim g(x) = \lim h(x) = A$$

则 $\lim f(x) = A.$

证明: 不失一般性,考虑极限过程$x \to x_0$.

设$\exists \delta_0 > 0$,当$0 < |x - x_0| < \delta_0$时,$g(x) \le f(x) \le h(x)$,

$$\because \lim_{x \to x_0} g(x) = \lim_{x \to x_0} h(x) = A,$$

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta_1 > 0$, 当$0 < |x - x_0| < \delta_1$时, 有$|g(x) - A| < \varepsilon$,

即 $A - \varepsilon < g(x) < A + \varepsilon.$

$\exists \delta_2 > 0$, 当$0 < |x - x_0| < \delta_2$时, 有$|h(x) - A| < \varepsilon$,

准则 I和准则 I'称为夹逼准则.

注意: 利用夹逼准则求极限关键是构造出y_n与z_n，并且y_n与z_n的极限是容易求的.

定理2 如果数列 x_n, y_n, z_n满足

(1) $y_n \le x_n \le z_n \quad (n = 1,2,\cdots)$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$

则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a.$

夹逼准则应用习例

例1. 求 $\lim\limits_{n\to\infty} n\cdot\left(\frac{1}{n^2+\pi}+\frac{1}{n^2+2\pi}+\ldots+\frac{1}{n^2+n\pi}\right)$.

例2. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+1}+\frac{1}{n^2+2}+\ldots+\frac{1}{n^2+n}\right)$.

例3. 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

例4. 设 $a_1,a_2,\cdots,a_k>0$, k 为正整数,

证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_k^n}=\max\{a_1,a_2,\cdots,a_k\}$

例1. 求 $\lim\limits_{n\to\infty} n\cdot\left(\frac{1}{n^2+\pi}+\frac{1}{n^2+2\pi}+\dots+\frac{1}{n^2+n\pi}\right).$

解:

$$\because \frac{n^2}{n^2+n\pi}\le n\left(\frac{1}{n^2+\pi}+\frac{1}{n^2+2\pi}+\cdots+\frac{1}{n^2+n\pi}\right)\le\frac{n^2}{n^2+\pi}$$

又 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+n\pi}=1,\qquad \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+\pi}=1.$

由夹逼准则得

$$\lim_{n\to\infty} n\cdot\left(\frac{1}{n^2+\pi}+\frac{1}{n^2+2\pi}+\dots+\frac{1}{n^2+n\pi}\right)=1.$$

Back

例2. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+1}+\frac{1}{n^2+2}+\ldots+\frac{1}{n^2+n}\right).$

解： $\because \frac{n}{n^2+n}\le\left(\frac{1}{n^2+1}+\frac{1}{n^2+2}+\cdots+\frac{1}{n^2+n}\right)\le\frac{n}{n^2+1}$

又 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n^2+n}=0,\qquad \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n^2+1}=0.$

由夹逼准则得

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+1}+\frac{1}{n^2+2}+\ldots+\frac{1}{n^2+n}\right)=0.$$

Back

例3. 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1.$

证明: 当$n>1$时, $\sqrt[n]{n}>1.$

记$a_n=\sqrt[n]{n}=1+h_n\,(h_n>0)$,

则有$n=(1+h_n)^n=1+nh_n+\dfrac{n(n-1)}{2!}h_n^2+\cdots+h_n^n\ge\dfrac{n(n-1)}{2}h_n^2$

$$0\le h_n^2\le\frac{2}{n-1},\quad 0\le h_n\le\sqrt{\frac{2}{n-1}},$$

于是有$1\le a_n=1+h_n\le1+\sqrt{\dfrac{2}{n-1}}$, 而 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\sqrt{\dfrac{2}{n-1}}\right)=1$,

$\therefore\ \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1.$ 类似可证, $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1\,(a>0).$

Back

例4.设$a_1,a_2,\cdots,a_k>0,k$为正整数,证明

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_k^n}=\max\{a_1,a_2,\cdots,a_k\}$$

证明: 令$a=\max\{a_1,a_2,\cdots,a_k\}$,

$$a=\sqrt[n]{a^n}<\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_k^n}<\sqrt[n]{ka^n}=a\cdot\sqrt[n]{k}$$

又 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{k}=1,$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_k^n}=a=\max\{a_1,a_2,\cdots,a_k\}$$

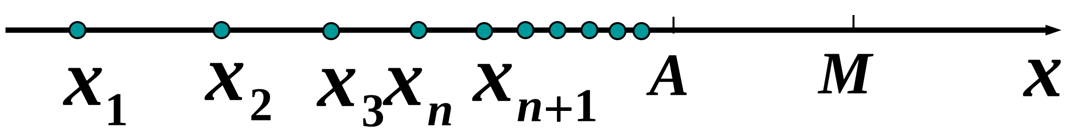
二、单调有界准则

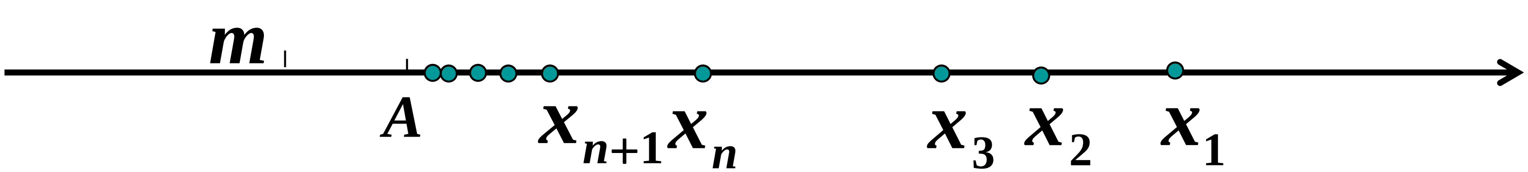
定理3 (单调有界准则—准则II)

单调有界数列必有极限.

注意：单增数列只需上有界；单减数列只需下有界.

几何解释:





例5. 设$a>0$, 证明数列$x_1=\sqrt{a}, x_2=\sqrt{a+\sqrt{a}},$

$$x_3=\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a}}},\cdots,x_n=\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{\cdots+\sqrt{a}}}},\cdots$$

的极限存在，并求其极限.

例6 设 $x_{n+1}=\dfrac{1}{2}(x_n+\dfrac{a}{x_n})$ （$n=1,2,\cdots$），且

$x_1>0$，$a>0$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

例5.设$a>0$,证明数列$x_1=\sqrt{a}, x_2=\sqrt{a+\sqrt{a}}$,

$$x_3=\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a}}},\cdots, x_n=\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{\cdots+\sqrt{a}}}},\cdots$$

的极限存在，并求其极限.

解：$\because x_{n+1}=\sqrt{a+x_n} \quad (n=1,2,\cdots)$

$$x_1=\sqrt{a}>0,$$

$$x_2=\sqrt{a+x_1}>\sqrt{a}=x_1,$$

假设 $x_n>x_{n-1}$,

则 $x_{n+1}=\sqrt{a+x_n}>\sqrt{a+x_{n-1}}=x_n$ 即 x_n单增.

从而 $\dfrac{x_{n-1}}{x_n}<1$,

又 $x_n=\sqrt{a+x_{n-1}}$， 则 $x_n^2=a+x_{n-1}$.

$$\therefore x_n=\frac{x_n^2}{x_n}=\frac{a+x_{n-1}}{x_n}=\frac{a}{x_n}+\frac{x_{n-1}}{x_n}<\frac{a}{\sqrt{a}}+1=\sqrt{a}+1$$

即 x_n 上有界. 所以数列极限存在.

设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=A$,

则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^2=\lim\limits_{n\to\infty}(a+x_{n-1})=a+\lim\limits_{n\to\infty} x_{n-1}$.

即 $A^2=a+A$, 解得 $A=\dfrac{1\pm\sqrt{1+4a}}{2}$ (负号舍去)

$$\therefore \lim_{n\to\infty} x_n=\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}.$$

例6 设 $x_{n+1}=\frac{1}{2}(x_n+\frac{a}{x_n})$ $(n=1,2,\cdots)$，且

$x_1>0$，$a>0$，求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

证 1° 有界性

由$x_1>0$, 易知 $x_n>0\,(n=1,2,\cdots)$.

$$\because\quad x_{n+1}=\frac{1}{2}(x_n+\frac{a}{x_n})=\frac{1}{2}[(\sqrt{x_n})^2+(\sqrt{\frac{a}{x_n}})^2]$$

$$\geq\sqrt{x_n}\cdot\sqrt{\frac{a}{x_n}}=\sqrt{a}\quad(n=1,2,\cdots)$$

$\therefore$ $\{x_n\}$有下界.

2° 单调性

$$\boxed{x_n \ge \sqrt{a} \quad (n=2,3,\cdots)}$$

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{2}(x_n + \frac{a}{x_n}) - x_n$$

$$= \frac{1}{2}(\frac{a}{x_n} - x_n) = \frac{a - x_n^2}{2x_n} \le 0 \quad (n=2, 3,\cdots)$$

或 $\dfrac{x_{n+1}}{x_n} = \dfrac{1}{2}(1+\dfrac{a}{x_n^2}) \le \dfrac{1}{2}(1+\dfrac{a}{a}) = 1 \quad (n=2, 3,\cdots)$

$\therefore$ $\{x_n\}$单调减少且有下界.

$\therefore$ $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$存在， 令 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$， 则 $A \ge \sqrt{a}$

由$x_{n+1}=\frac{1}{2}(x_n+\frac{a}{x_n})$，令$n\to\infty$

得 $$\lim_{n\to\infty} x_{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}(x_n+\frac{a}{x_n}),$$

即 $$A=\frac{1}{2}(A+\frac{a}{A}),$$

解得 $A=\sqrt{a}$ 或 $A=-\sqrt{a}$（舍去）

$$\therefore \quad \lim_{n\to\infty} x_n=\sqrt{a}.$$

Back

三、Cauchy收敛准则

定理4 (Cauchy收敛准则)

数列$\{x_n\}$收敛的充分必要条件是:

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbf{N}^{+}$, **使得当** $m > N, n > N$ **时, 有** $|x_n - x_m| < \varepsilon$.

满足上述条件的数列也称**Cauchy数列或基本数列**. 这样, Cauchy收敛准则又可叙述成:

数列$\{x_n\}$收敛的充分必要条件是: $\{x_n\}$为Cauchy数列.

证明: 必要性 设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ ，$\forall \varepsilon > 0$ ，由数列极限的定义，$\exists N \in \mathbf{N}^{+}$，

当 $n > N$ 时，有 $|x_n - a| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ 同样，当 $m > N$ 时，也有 $|x_m - a| < \dfrac{\varepsilon}{2}$

因此，当 $m > N, n > N$ 时,有 $|x_n - x_m| = |(x_n - a) - (x_m - a)| \le |x_n - a| + |x_m - a|$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

即得$\{x_n\}$为Cauchy数列.

充分性的证明要用到实数理论，这里从略.

注意:

（1）Cauchy收敛准则的几何意义: 数列$\{x_n\}$收敛的充分必要条件是: 对于任意给定的正数 ε , 在数轴上一切具有足够大号码的点 x_n 中, 任意两点间的距离小于ε .

（2）由于Cauchy收敛准则是判断数列收敛的充分必要条件, 因此, 它不但可以用来判断数列的收敛性, 而且也可以用来判断数列的发散

（3）应用上常使用Cauchy收敛准则的一个等价形式: 数列 $\{x_n\}$ 收敛的充分必要条件是: $\forall\varepsilon>0$, $\exists N\in\mathbf{N}^{+}$,使得当 $n>N$ 时, 对一切正整数 p , 有 $|x_{n+p}-x_n|<\varepsilon$.

Cauchy收敛准则应用举例

例1 设 $x_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin k}{2^k}$，证明数列 $\{x_n\}$ 收敛.

证 易知 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}=0$，故对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N\in\mathbf{N}^+$，当 $n>N$ 时，有 $\left|\frac{1}{2^n}\right|<\varepsilon$，

因此，当 $n>N$ 时，对一切正整数 p，有

$$\left|x_{n+p}-x_n\right|=\left|\frac{\sin(n+1)}{2^{n+1}}+\frac{\sin(n+2)}{2^{n+2}}+\cdots+\frac{\sin(n+p)}{2^{n+p}}\right|$$

$$\leq\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{1}{2^{n+2}}+\cdots+\frac{1}{2^{n+p}}=\frac{\frac{1}{2^{n+1}}\left(1-\frac{1}{2^p}\right)}{1-\frac{1}{2}}<\frac{1}{2^n}<\varepsilon,$$

于是由 Cauchy 收敛准则知 $\{x_n\}$ 收敛.

Cauchy收敛准则应用举例

例 2 设 $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} (n = 1, 2, \cdots)$，证明数列 $\{x_n\}$ 发散.

证 取 $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}$，对任意给定的正整数 N，取 $n_0 = p_0 = N + 1$，

则有 $n_0 > N$，但

$$\left| x_{n_0 + p_0} - x_{n_0} \right| = \frac{1}{N+2} + \frac{1}{N+3} + \cdots + \frac{1}{2N+2}$$

$$\geq \frac{N+1}{2N+2} = \frac{1}{2} = \varepsilon_0$$

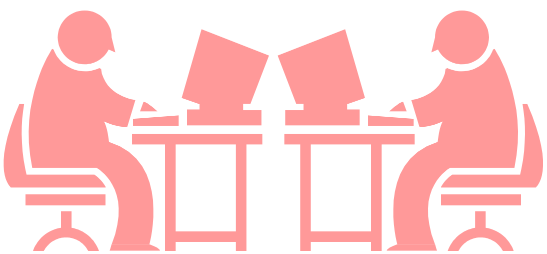
所以，数列 $\{x_n\}$ 发散.

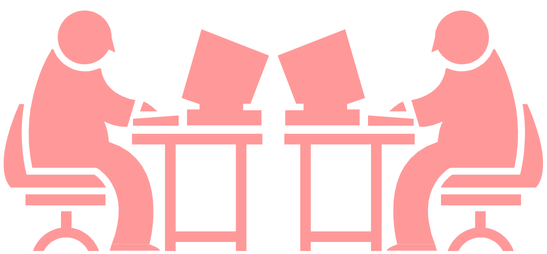
四、两个重要极限

1\. 重要极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$

首先看看在计算机上

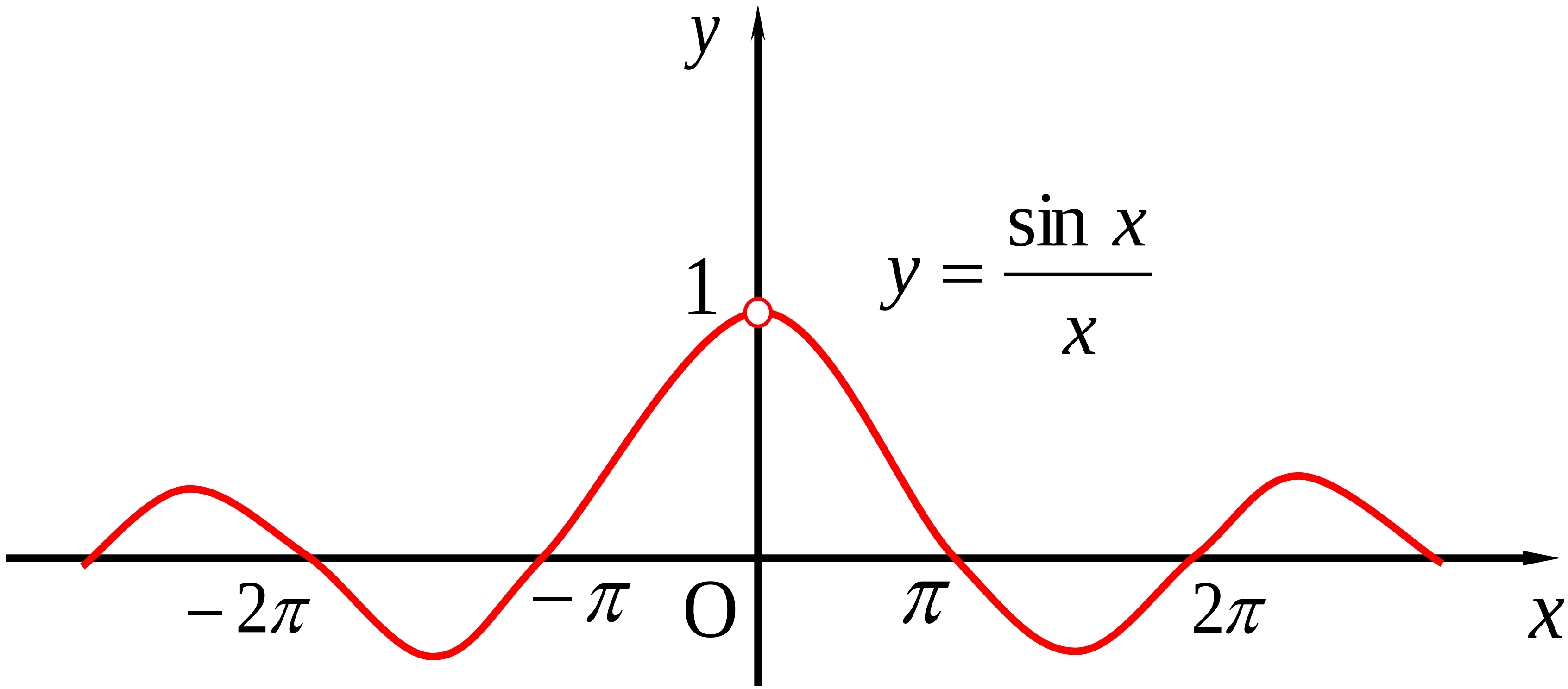
进行的数值计算结果：





$x \to 0$	$\dfrac{\sin x}{x} \to 1$
0.1	**0.99833416646828815475018**
0.01	**0.99998333341666664533527**
0.001	**0.99999983333333416367097**
0.0001	**0.99999999833333334174773**
0.00001	**0.99999999998333332209320**
0.000001	**0.99999999999998333555240**
0.0000001	**1.00000000000000000000000**
0.00000001	**1**

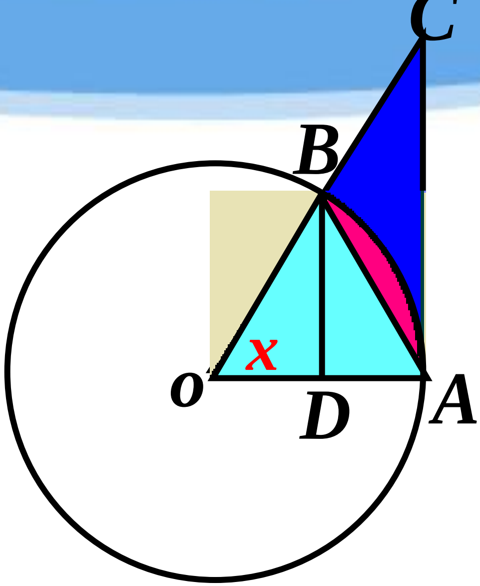
然后看 $y=\dfrac{\sin x}{x}$ 的图形.



Using the Sandwich theorem to find $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$

1.第一重要极限

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1}$$



设单位圆 O, 圆心角$\angle AOB = x$, $(0 < x < \frac{\pi}{2})$

作单位圆的切线, 得ΔACO.

扇形OAB的圆心角为x, ΔOAB的高为BD,

于是有$\sin x = BD$, $x =$ 弧 AB, $\tan x = AC$,

$\therefore \sin x < x < \tan x$, 即 $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$,

上式对于$-\frac{\pi}{2} < x < 0$也成立. 当 $0 < |x| < \frac{\pi}{2}$时,

又 $\lim_{x\to 0}\cos x = 1$, $\therefore \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1.$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

$$\lim_{u\to 0}\frac{\sin u}{u}=1$$

说明:重要极限1的标准式的特点是

1)是 $\frac{0}{0}$ 型未定式

2)含三角式

3)分子的三角函数的弧度数与分母一致.

$$\lim_{\square\to 0}\frac{\sin\square}{\square}=1$$

第一重要极限应用习例

例6.求极限：(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{x}$；(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\tan x}{x}$；

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$ （4） $\lim\limits_{x\to\infty} x\arcsin\dfrac{1}{x}$.

例7.计算 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-\cos x}}{x}$.

例8. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}$

例9.计算 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x\sin x}-\cos x}{x\sin x}$.

例10.计算 $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\tan\dfrac{\pi}{2}x$. 例11.计算 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x(x^2-4)}{\sin\pi x}$.

例6.求极限：(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{x}$; (2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}$; (3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

(4) $\lim\limits_{x\to\infty} x\arcsin\dfrac{1}{x}$.

$\left(\dfrac{0}{0}\right)$

解:

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}5\cdot\dfrac{\sin 5x}{5x}=5\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\sin u}{u}=5.\quad (u=5x)$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}\cdot\dfrac{1}{\cos x}=1$

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2\dfrac{x}{2}}{x^2}$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\dfrac{x}{2}}{\left(\dfrac{x}{2}\right)^2}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\dfrac{x}{2}}{\dfrac{x}{2}}\right)^2=\frac{1}{2}$$

Back

(4) $\lim\limits_{x\to\infty} x\arcsin\frac{1}{x}.$ $\left(\frac{0}{0}\right)$

解: 令 $\arcsin\frac{1}{x} = t,$

则当 $x\to\infty$时, $t\to 0.$

$$\therefore \lim_{x\to\infty} x\arcsin\frac{1}{x} = \lim_{t\to 0}\frac{t}{\sin t}$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{1}{\frac{\sin t}{t}} = \frac{1}{\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}} = 1.$$

同理 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x} = 1.$

Back

例7.计算 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-\cos x}}{x}$. $\left(\dfrac{0}{0}\right)$

解: $$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{1-\cos x}}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{1-\cos x}}{\sqrt{x^2}}$$

$$=\sqrt{\lim_{x\to 0^+}\frac{1-\cos x}{x^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{1-\cos x}}{x}=-\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{1-\cos x}}{\sqrt{x^2}}=-\sqrt{\lim_{x\to 0^-}\frac{1-\cos x}{x^2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$\therefore \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-\cos x}}{x}$ 不存在.

Back

例8. 求 $\lim_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}$

例9.计算$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x\sin x}-\cos x}{x\sin x}$.　　$\left(\dfrac{0}{0}\right)$

解:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x\sin x}-\cos x}{x\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{1+x\sin x-\cos^2 x}{x\sin x(\sqrt{1+x\sin x}+\cos x)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x\sin x+\sin^2 x}{x\sin x}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+x\sin x}+\cos x}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{\sin x}{x}\right)=1.$$

Back

例10.计算$\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\tan\frac{\pi}{2}x.$ $\left(\frac{0}{0}\right)$

解：$$\lim_{x\to 1}(1-x)\tan\frac{\pi}{2}x \xlongequal{t=1-x} \lim_{t\to 0} t\tan\frac{\pi}{2}(1-t)$$

$$=\lim_{t\to 0} t\cot\frac{\pi}{2}t = \lim_{t\to 0} t\frac{\cos\frac{\pi}{2}t}{\sin\frac{\pi}{2}t}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{\pi}{2}t}{\sin\frac{\pi}{2}t}\cdot\frac{\cos\frac{\pi}{2}t}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi}.$$

Back

例11.计算$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x(x^2-4)}{\sin\pi x}$.　$\left(\dfrac{0}{0}\right)$

解： $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x(x^2-4)}{\sin\pi x}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x(x-2)(x+2)}{\sin\pi x}$

$$\overset{令x-2=t}{=\!=\!=\!=\!=\!=}\lim_{t\to 0}\frac{(2+t)t(4+t)}{\sin\pi(2+t)}=\lim_{t\to 0}\frac{(2+t)t(4+t)}{\sin\pi t}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{(2+t)(4+t)}{\dfrac{\sin\pi t}{\pi t}\cdot\pi}=\frac{8}{\pi}.$$

Back

2.第二重要极限

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e}$$

下面分三步进行讨论.

(1)设x依次按自然数n变化，则函数为

$$x_n = f(n) = (1+\frac{1}{n})^n$$

$$x_n = 1+\frac{n}{1!}\cdot\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{2!}\cdot\frac{1}{n^2}+\cdots+\frac{n(n-1)\cdots(n-n+1)}{n!}\cdot\frac{1}{n^n}$$

$$=1+1+\frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n})+\cdots+\frac{1}{n!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\cdots(1-\frac{n-1}{n}).$$

类似地，$x_{n+1}=1+1+\frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n+1})+\cdots$

$$+\frac{1}{n!}(1-\frac{1}{n+1})(1-\frac{2}{n+2})\cdots(1-\frac{n-1}{n+1})$$

$$+\frac{1}{(n+1)!}(1-\frac{1}{n+1})(1-\frac{2}{n+2})\cdots(1-\frac{n}{n+1}).$$

显然 $x_{n+1}>x_n$，　$\therefore \{x_n\}$是单调递增的；

$$x_n<1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}<1+1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}=3-\frac{1}{2^{n-1}}<3,$$

$\therefore \{x_n\}$是有界的；

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在. 记为 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n=e$　$(e=2.71828\cdots)$

(2) $x \to +\infty$时，设 $n \le x < n+1$

于是 $\dfrac{1}{n+1} < \dfrac{1}{x} \le \dfrac{1}{n}$,

$$1+\frac{1}{n+1} < 1+\frac{1}{x} \le 1+\frac{1}{n},$$

$$(1+\frac{1}{n+1})^n < (1+\frac{1}{x})^x < (1+\frac{1}{n})^{n+1},$$

而 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\dfrac{1}{n+1})^n = \lim\limits_{n\to\infty}(1+\dfrac{1}{n+1})^{n+1}\cdot(1+\dfrac{1}{n+1})^{-1} = e$

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^{n+1} = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n\cdot(1+\frac{1}{n}) = e$$

$$\therefore \lim_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e.$$

(3) $x \to -\infty$时，设 $x = -y$, 则 $y \to +\infty$

$$\lim_{x \to -\infty}(1+\frac{1}{x})^x = \lim_{y \to +\infty}(1-\frac{1}{y})^{-y} = \lim_{y \to +\infty}(\frac{y}{y-1})^y$$

$$= \lim_{y \to +\infty}(1+\frac{1}{y-1})^y = \lim_{y \to +\infty}(1+\frac{1}{y-1})^{y-1} \cdot (1+\frac{1}{y-1}) = e$$

注意：

(1)常用的形式是 $\lim\limits_{\varphi(x) \to \infty}(1+\frac{1}{\varphi(x)})^{\varphi(x)} = e,$ 1^∞型

并以此为工具可求出相应的其它一些函数的极限.

(2) 令$z = \frac{1}{x}$,有 $\lim\limits_{z \to 0}(1+z)^{\frac{1}{z}} = e.$

说明：重要极限2标准式的特点是

1)是 1^{∞} 型未定式

2)是 $\left(1+\square\right)^{\frac{1}{\square}}$ 型

第二重要极限应用习例

例12.计算 (1) $\lim\limits_{x\to\infty}(1-\frac{1}{x})^x$; (2) $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{2}{x})^x$

例13.计算 $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{x+2}{x+1})^{2x+1}$.

例14.计算 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x^2-1}\right)^x$.

例15.计算 $\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt[x]{\cos\sqrt{x}}$.

例16.设 $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{x+a}{x-a})^x=9$, 求$a$.

例12.计算 (1) $\lim\limits_{x\to\infty}(1-\frac{1}{x})^x$; (2) $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{2}{x})^x$ $\quad 1^\infty$型

解: (1) 原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}[(1+\frac{1}{-x})^{-x}]^{-1}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{(1+\frac{1}{-x})^{-x}}=\frac{1}{e}$.

(2) 原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}[(1+\frac{2}{x})^{\frac{x}{2}}]^2=e^2$.

例13.计算 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{x+1}\right)^{2x+1}$. 1^{∞}型

解2: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{x+1}\right)^{2x+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x+1}\right)^{2x+1}$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x+1}\right)^{2(x+1)-1}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x+1}\right)^{(x+1)}\right]^2\cdot\left[\left(1+\frac{1}{x+1}\right.\right.$$

$$=\left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x+1}\right)^{(x+1)}\right]^2\left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x+1}\right)\right]^{-1}=e^2.$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x+1}\right)^{2x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(1+\frac{2}{x}\right)^{2x+1}}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^{2x+1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(1+\frac{2}{x}\right)^{4\cdot\frac{x}{2}}\cdot\left(1+\frac{2}{x}\right)}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^{2\cdot x}\cdot\left(1+\frac{1}{x}\right)}$$

Back

$$=\left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}}\right]^4\left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)\right]\Big/\left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right]^2\left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]=e^2.$$

例14. 计算 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x^2-1}\right)^x$.

解:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x^2-1}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{x^2}}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\left(1-\frac{1}{x^2}\right)^x}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\cdot\left(1-\frac{1}{x}\right)^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(1-\frac{1}{x}\right)^{-x}}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}=\frac{e}{e}=1$$

例15. 计算 $\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt[x]{\cos\sqrt{x}}$.

解: $\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt[x]{\cos\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\cos\sqrt{x}\right)^{\frac{1}{x}}$

$$=\lim_{x\to 0^+}\left[1+(\cos\sqrt{x}-1)\right]^{\frac{1}{x}}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\left(1-2\sin^2\frac{\sqrt{x}}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\left[\left(1-2\sin^2\frac{\sqrt{x}}{2}\right)^{\frac{1}{-2\sin^2\frac{\sqrt{x}}{2}}}\right]^{\frac{-2\sin^2\frac{\sqrt{x}}{2}}{x}}=e^{-\frac{1}{2}}.$$

Back

例16.设 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+a}{x-a}\right)^x=9$,求$a$.

解:

$$\because \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+a}{x-a}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(1+\dfrac{a}{x}\right)^{\frac{x}{a}\cdot a}}{\left(1+\dfrac{-a}{x}\right)^{-\frac{x}{a}\cdot(-a)}}$$

$$=\mathrm{e}^{2a}$$

故 $\mathrm{e}^{2a}=9$, $\quad\therefore a=\ln 3$.

Back

三、小结：

两个重要极限在实践中有很重要的应用，它们的证明应用了夹逼原理和单调有界准则，证明的方法非常简练，值得借鉴，对两个重要极限的认识不能仅仅停留在它们的结果上。

$$(1)\quad \lim_{\square\to 0}\frac{\sin\square}{\square}=1$$

$$(2)\quad \lim_{\square\to\infty}\left(1+\frac{1}{\square}\right)^{\square}=e$$

或 $$\lim_{\square\to 0}(1+\square)^{\frac{1}{\square}}=e$$

注 $\square$ 代表相同的表达式