# 高等数学A

## 第3章 一元函数积分学

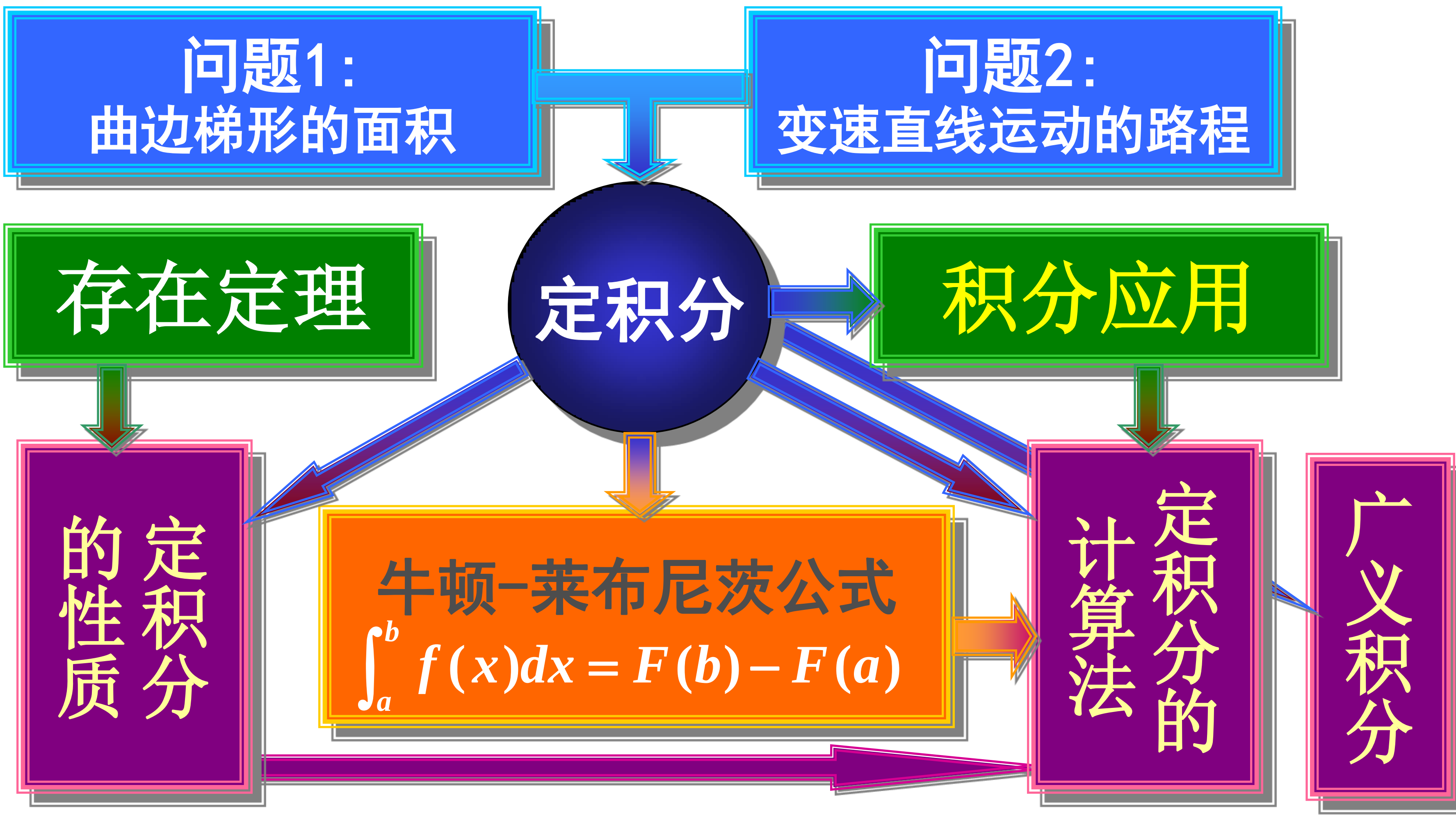
### 定 积 分 习 题 课

中南大学开放式精品示范课堂高等数学建设组

# 定积分习题课

- 结构框图
- 简略内容小结
  - 定积分的概念、性质与定理
  - 定积分的计算及技巧
  - 广义积分
  - 定积分的应用
- 常见题型及典型习例
  - 可直接用换元法或分部积分法计算的积分
  - 对称区间时考虑被积函数的奇偶性
  - 出现相同积分形式合并, 从而求出积分值
  - 被积函数是分段函数的情形
  - 积分限是变量$x$或被积函数含有参数的情形
  - 关于定积分不等式的证明
  - 关于定积分等式的证明
  - 其它

# 主要内容


问题1：
曲边梯形的面积
问题2：
变速直线运动的路程
存在定理
定积分
积分应用
定积分的性质
牛顿–莱布尼茨公式
$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$
定积分的计算法
广义积分

## 一. 定积分的概念、性质与定理

### 1. 定义

$$\int_a^b f(x)dx = I = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

注意: 定积分与积分变量的字母无关!

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du$$

### 2. 定积分的几何意义

它是介于 $x$ 轴、函数 $f(x)$ 的图形及两条直线 $x=a, x=b$ 之间的各部分面积的代数和. 在 $x$ 轴上方的面积取正号; 在 $x$ 轴下方的面积取负号.

3. 性质

(1)$\int_a^b[k_1 f(x) \pm k_2 g(x)]dx = k_1\int_a^b f(x)dx \pm k_2\int_a^b g(x)dx$

(2)$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

(3)$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$, 特别地$\int_a^a f(x)dx = 0$

(4)若在$[a,b]$上有$f(x) \le g(x)$, 则$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$

特别地若$f(x) > 0$, 则$\int_a^b f(x)dx > 0$.

(5)若在$[a,b]$上有$m \le f(x) \le M$,

则$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$.

$$(6)\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx,(b>a).$$

(7)积分中值定理

设$f(x)$在$[a,b]$上连续,则至少存在一点$\xi\in[a,b]$,使得

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a).$$

4. 变上限的定积分

$$\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt. \quad 且\ \Phi(x_0)=\int_a^{x_0} f(t)dt.$$

若在对称区间上$f(x)$为奇(偶)函数, 则$\Phi(x)$为偶(奇)函数.

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x).$$

$$\frac{d}{dx}\int_a^{\varphi(x)} f(t)dt = \left[\int_a^{\varphi(x)} f(t)dt\right]' = f[\varphi(x)]\cdot\varphi'(x).$$

$$\frac{d}{dx}\int_{\varphi(x)}^{b} f(t)dt = \left[\int_{\varphi(x)}^{b} f(t)dt\right]' = -f[\varphi(x)]\cdot\varphi'(x).$$

$$\frac{d}{dx}\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t)dt = f[\psi(x)]\cdot\psi'(x) - f[\varphi(x)]\cdot\varphi'(x).$$

## 二. 定积分的计算及技巧

### 1. 用定积分的定义计算

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f[a+\frac{i(b-a)}{n}]\cdot\frac{b-a}{n}$$

### 2. 用牛顿-莱布尼兹公式计算

设$f(x)$在$[a,b]$上连续, $F(x)$是$f(x)$的一个原函数, 则

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a).$$

### 3. 用定积分的换元法计算

$$\int_a^b f(x)dx \xlongequal{x=\varphi(t)} \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$$

换元同时换限!

$a<b$时未必$\alpha<\beta$!

$x=\varphi(t)$单值.

4. 用定积分的分部积分法计算

$$\int_a^b u dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v du$$

5. 用函数的周期性化简并计算

$$(1)\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx$$

$$(2)\int_a^{a+nT} f(x)dx = n\int_0^T f(x)dx$$

$$(3)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx$$

$$= \begin{cases} \dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdot\cdots\cdot\dfrac{4}{5}\cdot\dfrac{2}{3}\cdot 1, & n\text{为奇数} \\ \dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdot\cdots\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\pi}{2}, & n\text{为偶数} \end{cases}$$

6. 用奇偶函数在对称区间上的积分化简并计算

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \begin{cases} 2\int_0^a f(x)dx, & \text{当} f(x) \text{为偶函数} \\ 0, & \text{当} f(x) \text{为奇函数} \end{cases}$$

7. 常用公式

$$(1)\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_0^a [f(x) + f(-x)]dx$$

$$(2)\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx$$

$$(3)\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)dx = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx$$

$$(4)\int_a^b \sqrt{\varphi^2(x)}dx = \int_a^b |\varphi(x)|dx$$

## 三. 广义积分

### 1. 无穷限的广义积分

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$$

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^0 f(x)dx + \int_0^{+\infty} f(x)dx$$

$$= \lim_{a\to-\infty}\int_a^0 f(x)dx + \lim_{b\to+\infty}\int_0^b f(x)dx$$

**当极限存在时，称广义积分收敛；当极限不存在时，称广义积分发散.**

## 2. 无界函数的广义积分

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx$$

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

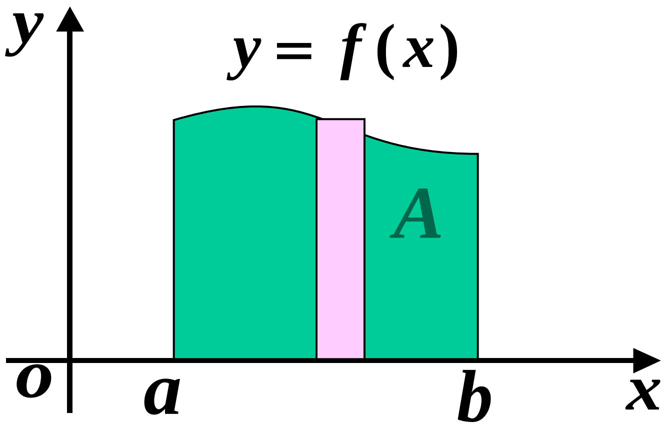
$$= \lim_{\varepsilon\to+0}\int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \lim_{\varepsilon'\to+0}\int_{c+\varepsilon'}^b f(x)dx$$

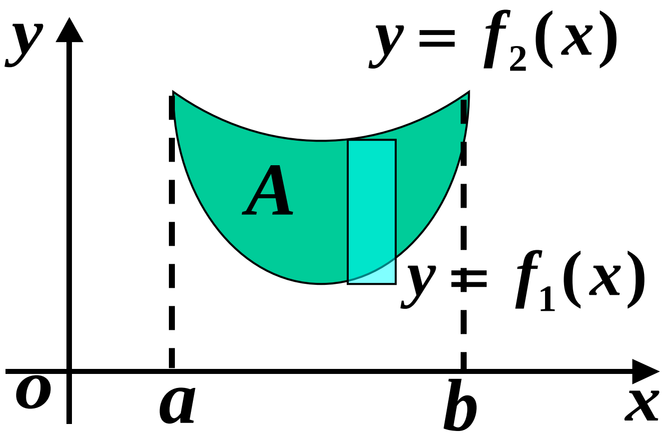
**当极限存在时，称广义积分收敛；当极限不存在时，称广义积分发散.**

# 四. 定积分的应用

## (1) 平面图形的面积

### 直角坐标情形




$$A = \int_a^b f(x)dx$$

$$A = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]dx$$

## 参数方程所表示的函数

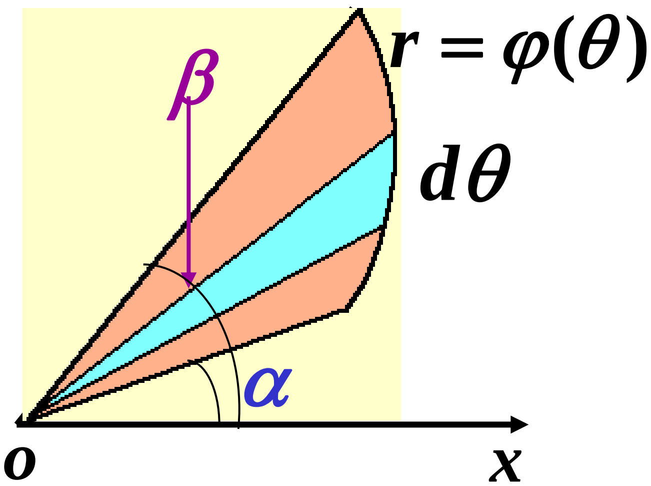
如果曲边梯形的曲边为参数方程 $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$

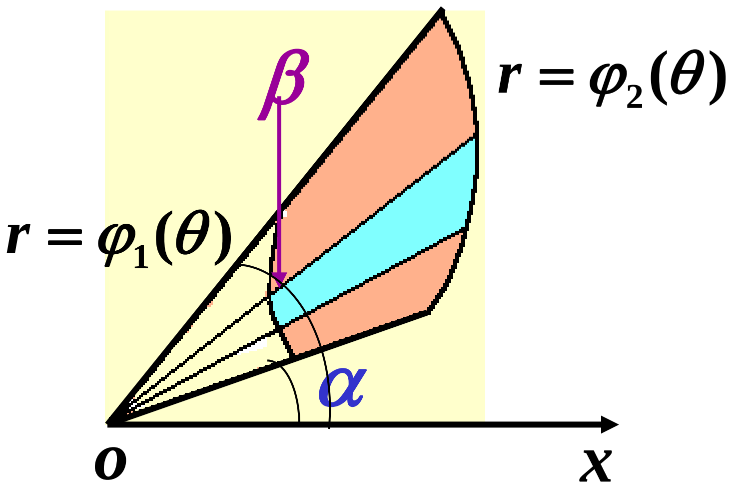
曲边梯形的面积 $A = \int_{t_1}^{t_2} \psi(t)\varphi'(t)dt$

（其中$t_1$和$t_2$对应曲线起点与终点的参数值）

在$[t_1, t_2]$（或$[t_2, t_1]$）上$x = \varphi(t)$具有连续导数，$y = \psi(t)$连续.

# 极坐标情形

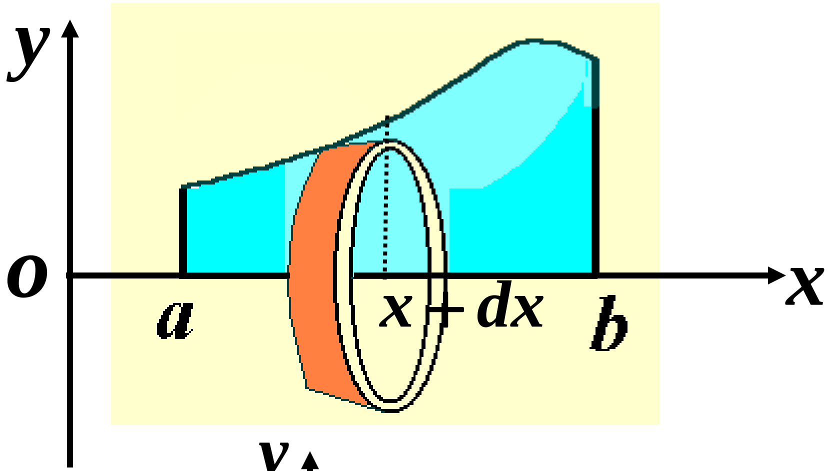


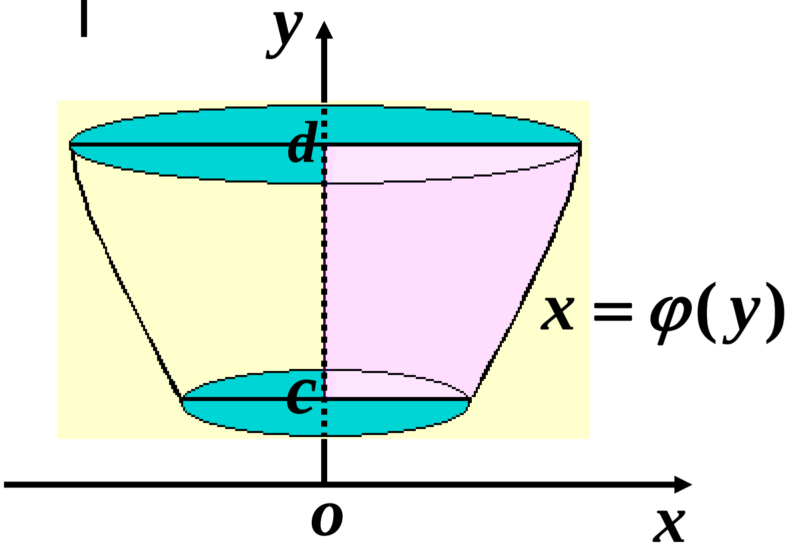

$$A=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}[\varphi(\theta)]^2 d\theta$$

$$A=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}[\varphi_2^2(\theta)-\varphi_1^2(\theta)]d\theta$$

(2) 体积

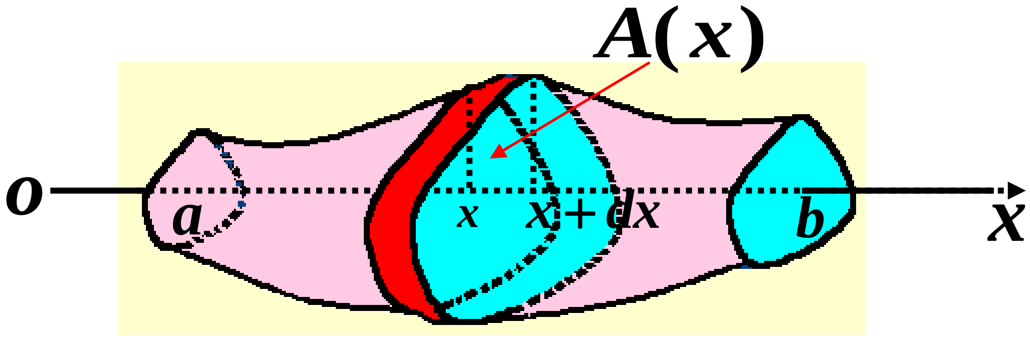



$$V = \int_a^b \pi [f(x)]^2 dx$$



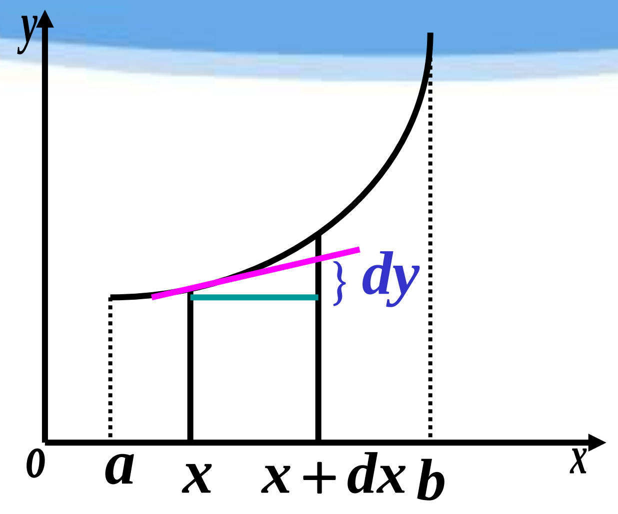

$$V = \int_c^d \pi [\varphi(y)]^2 dy$$

平行截面面积为已知的立体的体积




$$V = \int_a^b A(x)dx$$

## (3) 平面曲线的弧长




A. 曲线弧为 $y = f(x)$

弧长 $s = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2} dx$

B. 曲线弧为 $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$ $(\alpha \le t \le \beta)$

其中$\varphi(t), \psi(t)$在$[\alpha, \beta]$上具有连续导数

弧长 $s = \int_\alpha^\beta \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt$

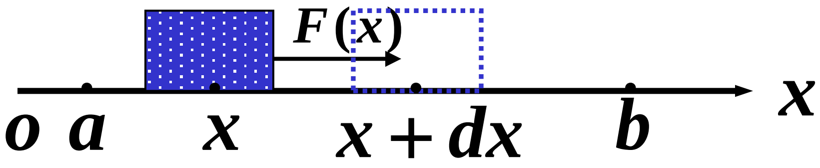
C. 曲线弧为 $r = r(\theta)$ $(\alpha \le \theta \le \beta)$

弧长 $s = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2(\theta) + r'^2(\theta)} d\theta$

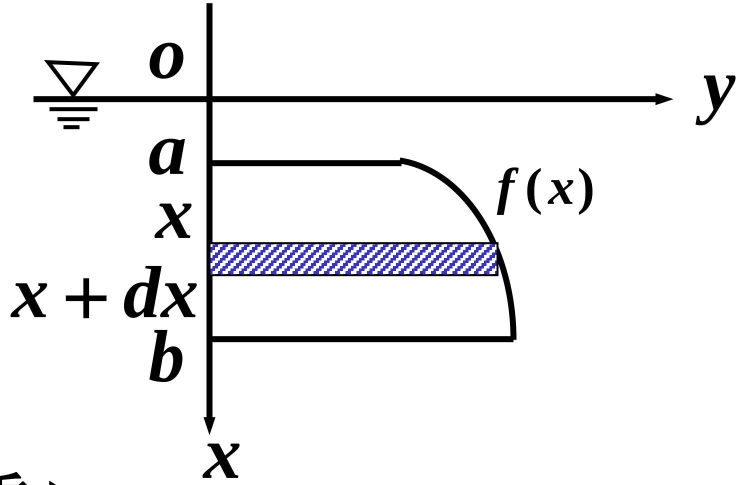
## (4) 变力所作的功

$$W = \int_a^b dW$$

$$= \int_a^b F(x)dx$$




## (5) 水压力



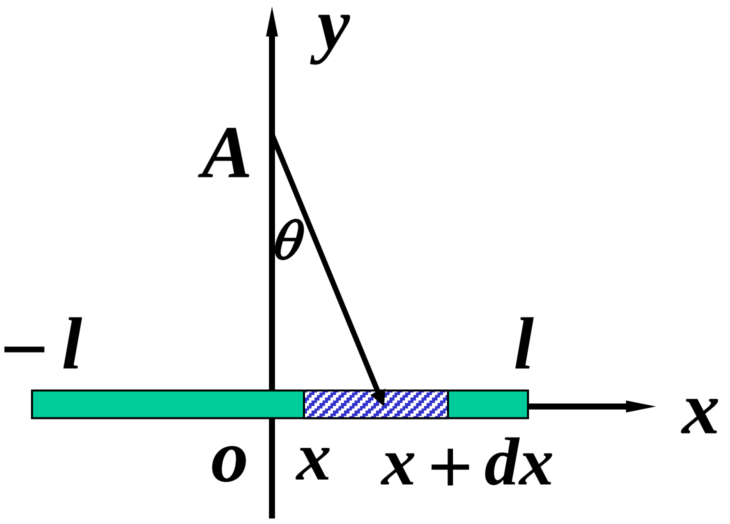

$$P = \int_a^b dP$$

$$= \int_a^b \mu x f(x)dx$$

( $\mu$ 为比重 )

(6) 引力

$$F_y=\int_{-l}^{l}dF_y=\int_{-l}^{l}\frac{Ga\rho dx}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}$$




$F_x=0.$ ( $G$ 为引力系数)

(7) 函数的平均值 $\bar{y}=\dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$

(8) 均方根 $\bar{y}=\sqrt{\dfrac{1}{b-a}\int_a^b f^2(x)dx}$

# 五. 常见题型及习例

**1. 可直接用换元法或分部积分法计算的积分**

例1 计算$\int_0^{n\pi}\sqrt{1-\sin 2x}dx.$

解 $\because \sqrt{1-\sin 2x}$以$\pi$为周期,

$$\therefore \text{原式}=\left(\int_0^{\pi}+\int_{\pi}^{2\pi}+\cdots+\int_{(n-1)\pi}^{n\pi}\right)\sqrt{1-\sin 2x}dx$$

$$=n\int_0^{\pi}\sqrt{1-\sin 2x}dx=n\int_0^{\pi}|\sin x-\cos x|dx$$

$$=n\left[\int_0^{\frac{\pi}{4}}-(\sin x-\cos x)dx+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}(\sin x-\cos x)dx\right.$$

$$=n\left(\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}+\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}-\cos x\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}-\sin x\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}\right)=2\sqrt{2}n.$$

**2. 当积分区间对称时,首先考虑被积函数和奇偶性**

例2 计算下列积分:

$$(1)\int_{-a}^{a}[f(x)-f(-x)]dx$$

$$(2)\int_{-1}^{1}[\frac{\sin x}{1+x^2}+(x^2-x+1)\arctan x]dx$$

解 (1) $\because\ f(x)-f(-x)$是奇数,$\therefore$ 原式 $=0$

(2)原式 $=2\int_0^1 -x\arctan x dx$

$$=-2\int_0^1 \arctan x d(\frac{1}{2}x^2)=1-\frac{\pi}{2}.$$

## 3. 出现相同积分形式合并, 从而求出积分值

例3 计算$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan x)dx$

解　令$x=\frac{\pi}{4}-t$得

$$\text{原式}=\int_{\frac{\pi}{4}}^{0} \ln[1+\tan(\frac{\pi}{4}-t)](-dt)=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\frac{1-\tan t}{1+\tan t})dt$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}[\ln 2-\ln(1+\tan t)]dt=\frac{\pi}{4}\ln 2-\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan t)dt$$

$$\therefore \text{原式}=\frac{\pi}{8}\ln 2$$

注意　本题用分部积分较繁!

## 4. 被积函数是分段函数或带绝对值的函数或含有最值

例4 设$f(x)=\begin{cases}0, & |x|>2\\ 4x^2, & |x|\le 2\end{cases}$，求$\int_{-2}^{2} xf(x-1)dx$.

解 $\int_{-2}^{2} xf(x-1)dx \overset{x-1=t}{=\!=\!=} \int_{-3}^{1}(t+1)f(t)dt$

$$=\int_{-3}^{-2}0dt+\int_{-2}^{1}(t+1)4t^2dt=-3.$$

例5 计算$\int_a^b xe^{-|x|}dx$

解 $\because \int xe^{-|x|}dx = \begin{cases} -xe^{-x} - e^{-x} + c_1 & x \geq 0 \\ xe^{x} - e^{x} + c_2 & x < 0 \end{cases}$

$$= -|x|e^{-|x|} - e^{-|x|} + c$$

$\therefore$ 原式$= [-|x|e^{-|x|} - e^{-|x|}]_a^b = \cdots\cdots$

例6 计算$\int_{-3}^{2} \min\{2, x^2\}dx$

解 $\because f(x) = \min\{2, x^2\} = \begin{cases} x^2 & |x| \leq \sqrt{2} \\ 2 & |x| > \sqrt{2} \end{cases}$

$\therefore$ 原式$= \int_{-3}^{-\sqrt{2}} 2dx + \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} x^2 dx + \int_{\sqrt{2}}^{2} 2dx = 10 - \frac{8}{3}\sqrt{2}.$

例7 计算$\int_1^5(|2-x|+|\sin x|)dx$.

**解** 原式$=\int_1^5|2-x|dx+\int_1^5|\sin x|dx$

$$=\int_1^2(2-x)dx+\int_2^5(x-2)dx+\int_1^{\pi}\sin x dx-\int_{\pi}^5\sin x dx$$

$$=7+\cos 1+\cos 5.$$

例8 请自己计算(1)$\int_{-2}^2\max(x,x^3)dx$

(2)$\int_{-1}^3|x(x-1)(x-2)|dx$

5. 积分限是变量x或被积函数含有参数时, 需讨论

例9 设$x \geq -1$,求$\int_{-1}^{x}(1-|t|)dt$.

解 $-1 \leq x < 0$时, 原式$=\int_{-1}^{x}(1+t)dt = \frac{1}{2}+x+\frac{1}{2}x^2$

$x \geq 0$时,原式$=\int_{-1}^{0}(1+t)dt + \int_{0}^{x}(1-t)dt$

$$= \frac{1}{2}+x-\frac{1}{2}x^2$$

$$\therefore \int_{-1}^{x}(1-|t|)dt = \begin{cases} \frac{1}{2}+x+\frac{1}{2}x^2, & -1 \leq x < 0, \\ \frac{1}{2}+x-\frac{1}{2}x^2, & x \geq 0. \end{cases}$$

例10 求$\int_0^1 x|x-a|dx$.

**解** 当$a\le 0$时，原式$=\int_0^1 x(x-a)dx=\dfrac{1}{3}-\dfrac{a}{2}$

当$0<a\le 1$时，原式$=\int_0^a x(a-x)dx+\int_a^1 x(x-a)dx$

$$=\frac{a^3}{3}-\frac{a}{2}+\frac{1}{3}$$

当$a>1$时，原式$=\int_0^1 x(a-x)dx=\dfrac{a}{2}-\dfrac{1}{3}$

$$\therefore \int_0^1 x|x-a|dx=\begin{cases}\dfrac{1}{3}-\dfrac{a}{2}, & a\le 0\\[2mm] \dfrac{a^3}{3}-\dfrac{a}{2}+\dfrac{1}{3}, & 0<a\le 1\\[2mm] \dfrac{a}{2}-\dfrac{1}{3}, & a>1\end{cases}$$

## 6. 关于定积分不等式的证明

例11 设$f(x)$在$[a,b]$上二次可微，且$f''(x)<0$，证明

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \ge \frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

证 设$F(x)=\int_a^x f(t)dt-(x-a)\frac{f(a)+f(x)}{2}.$

$$\text{则}F'(x)=f(x)-\frac{f(a)+f(x)}{2}-(x-a)\frac{f'(x)}{2}$$

$$=\frac{f(x)-f(a)}{2}-(x-a)\frac{f'(x)}{2}$$

$$=\frac{1}{2}\int_a^x f'(t)dt-\frac{1}{2}\int_a^x f'(x)dt$$

$$=\frac{1}{2}\int_a^x [f'(t)-f'(x)]dt$$

$\because f''(x)<0,\ \therefore f'(x)$单调递减.

当$t<x$时, $f'(t)\ge f'(x)$.

$$\therefore F'(x)=\frac{1}{2}\int_a^x [f'(t)-f'(x)]dt \ge 0$$

当$b>a$时, $F(b)\ge F(a)$, 且$F(a)=0$

从而$\int_a^b f(t)dt-(b-a)\dfrac{f(a)+f(b)}{2}\ge 0$

即 $\dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \ge \dfrac{f(a)+f(b)}{2}$.

例12 设$f(x)$在$[a,b]$上二阶导数连续，且$f''(x)\le 0$，证明

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le f\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

证 设$F(x)=\int_a^x f(t)dt-(x-a)f\left(\frac{a+x}{2}\right).$

则$$F'(x)=f(x)-f\left(\frac{a+x}{2}\right)-(x-a)\frac{1}{2}f'\left(\frac{a+x}{2}\right)$$

$$=f(x)-f\left(\frac{a+x}{2}\right)-\frac{x-a}{2}\cdot f'\left(\frac{a+x}{2}\right)$$

$$=\int_{\frac{a+x}{2}}^x f'(t)dt-\int_{\frac{a+x}{2}}^x f'\left(\frac{a+x}{2}\right)dt$$

$$= \int_{\frac{a+x}{2}}^{x} [f'(t) - f'(\frac{a+x}{2})]dt, \because f''(x) < 0, \therefore f'(x)\text{单调递减}.$$

当$t > \dfrac{a+x}{2}$时, $f'(t) \le f'(\dfrac{a+x}{2})$.

$$\therefore F'(x) = \int_{\frac{a+x}{2}}^{x} [f'(t) - f'(\frac{a+x}{2})]dt \le 0$$

当$b > a$时, $F(b) \le F(a)$, 且$F(a) = 0$

从而$\int_a^b f(t)dt - (b-a) f(\dfrac{a+b}{2}) \le 0$

即 $\dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le f(\dfrac{a+b}{2})$.

**思考题** 设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(x)>0$.

证明 $\int_a^b f(x)dx \cdot \int_a^b \frac{dx}{f(x)} \geq (b-a)^2$.

**证** 作辅助函数

$$F(x)=\int_a^x f(t)dt \cdot \int_a^x \frac{dt}{f(t)}-(x-a)^2,$$

$$\because F'(x)=f(x)\int_a^x \frac{1}{f(t)}dt+\int_a^x f(t)dt \cdot \frac{1}{f(x)}-2(x-a)$$

$$=\int_a^x \frac{f(x)}{f(t)}dt+\int_a^x \frac{f(t)}{f(x)}dt-\int_a^x 2dt,$$

$\because f(x) > 0, \quad \therefore \frac{f(x)}{f(t)} + \frac{f(t)}{f(x)} \geq 2$

即 $F'(x) = \int_a^x (\frac{f(x)}{f(t)} + \frac{f(t)}{f(x)} - 2)dt \geq 0$

$F(x)$ 单调增加.

又 $\because F(a) = 0, \quad \therefore F(b) \geq F(a) = 0,$

即 $\int_a^b f(x)dx \cdot \int_a^b \frac{dx}{f(x)} \geq (b-a)^2.$

## 7. 关于定积分等式的证明

例13 设$f(x)$在$[a,b]$上二阶导数连续，且$f(a)=f(b)=0$，

证明 $$\int_a^b f(x)dx=\frac{1}{2}\int_a^b (x-a)(x-b)f''(x)dx.$$

证 右边$=\frac{1}{2}\int_a^b [x^2-(a+b)x+ab]df'(x)$

$$=\frac{1}{2}[x^2-(a+b)x+ab]f'(x)\Big|_a^b-\frac{1}{2}\int_a^b f'(x)[2x-(a+b)]dx$$

$$=0-\frac{1}{2}\int_a^b [2x-(a+b)]df(x)$$

$$=-\frac{1}{2}[2x-(a+b)]f(x)\Big|_a^b+\frac{1}{2}\int_a^b f(x)2dx=\int_a^b f(x)dx.$$

例14 设$f(n)=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x dx$,

证明 $f(n)+f(n-2)=\dfrac{1}{n-1},(n>2).$

证 $f(n)=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^{n-2}x\cdot\tan^2 x dx$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^{n-2}x\cdot(\sec^2 x-1)dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^{n-2}x d\tan x-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^{n-2}x dx$$

$$=\frac{1}{n-1}\tan^{n-1}x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^{n-2}x dx=\frac{1}{n-1}-f(n-2)$$

$\therefore f(n)+f(n-2)=\dfrac{1}{n-1},(n>2).$

例15 设$f(x)$在[0,1]上可微，且满足$f(1)-2\int_0^{\frac{1}{2}}xf(x)dx=0$,

证明在(0,1)内至少存在一点$\xi$使得$f'(\xi)=-\dfrac{f(\xi)}{\xi}$.

证 设$F(x)=xf(x)$,

$$\because\ f(1)=2\int_0^{\frac{1}{2}}xf(x)dx=\eta f(\eta)\qquad (0\le\eta\le\frac{1}{2})$$

则$F(x)$在$[\eta,1]$上满足Rolle定理的条件，

$\therefore$ 至少存在一点$\xi\in(\eta,1)\subset(0,1)$，使得$F'(\xi)=0$.

即 $f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$. $\therefore\ f'(\xi)=-\dfrac{f(\xi)}{\xi}$.

## 8. 其它

例16 已知$f(\pi)=2, \int_0^{\pi}[f(x)+f''(x)]\sin x dx=5$,求$f(0)$.

解 $\int_0^{\pi}[f(x)+f''(x)]\sin x dx$

$$=\int_0^{\pi} f(x)d(-\cos x)+\int_0^{\pi}\sin x df'(x)$$

$$=-\cos x f(x)\Big|_0^{\pi}+\int_0^{\pi}\cos x f'(x)dx$$

$$+\sin x f'(x)\Big|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\cos x\cdot f'(x)dx$$

$$=f(\pi)+f(0)=5$$

$$\therefore f(0)=3$$

例17 已知$f(0)=1, f(2)=3, f'(2)=5$,试计算$\int_0^1 xf''(2x)dx$

**解** 令$2x=t$,则$\int_0^1 xf''(2x)dx=\int_0^2 \frac{t}{4} f''(t)dt$

$$=\frac{1}{4}\int_0^2 t\,df'(t)$$

$$=\frac{1}{4}[tf'(t)|_0^2-\int_0^2 f'(t)dt]$$

$$=\frac{1}{4}[tf'(t)|_0^2-f(t)|_0^2]$$

$$=\frac{1}{4}[2f'(2)-f(2)+f(0)]=2.$$

例18 设$f(x)=\int_0^x \frac{\sin t}{\pi - t}dt$,计算$\int_0^\pi f(x)dx$.

解 $\int_0^\pi f(x)dx = xf(x)\Big|_0^\pi - \int_0^\pi xf'(x)dx$

$$= \pi f(\pi) - \int_0^\pi x\cdot\frac{\sin x}{\pi - x}dx = \pi\int_0^\pi \frac{\sin t}{\pi - t}dt - \int_0^\pi x\cdot\frac{\sin x}{\pi - x}dx$$

$$= \int_0^\pi \frac{\pi\sin x}{\pi - x}dx - \int_0^\pi \frac{x\sin x}{\pi - x}dx = \int_0^\pi \frac{(\pi - x)\sin x}{\pi - x}dx$$

$$= \int_0^\pi \sin x dx = -\cos x\Big|_0^\pi = 2.$$

**思考题** 设 $f(x)=\int_0^x e^{-y^2+2y}dy$,求 $\int_0^1 (x-1)^2 f(x)dx$.

**解** 原式 $=\int_0^1 f(x)d\frac{1}{3}(x-1)^3$

$$=[\frac{1}{3}(x-1)^3 f(x)]_0^1-\int_0^1\frac{1}{3}(x-1)^3 df(x)$$

$$=[\frac{1}{3}(x-1)^3 f(x)]_0^1-\int_0^1\frac{1}{3}(x-1)^3 e^{-x^2+2x}dx$$

$$=-\frac{1}{6}\int_0^1 (x-1)^2 e^{-(x-1)^2+1}d[(x-1)^2]$$

$$\overset{\text{令}(x-1)^2=u}{=\!=\!=\!=}-\frac{e}{6}\int_1^0 ue^{-u}du=-\frac{1}{6}(e-2).$$

例19 设$\int_x^{2\ln 2}\frac{dt}{\sqrt{e^t-1}}=\frac{\pi}{6}$,求$x$.

解 设$\sqrt{e^t-1}=u$,

则$\int\frac{dt}{\sqrt{e^t-1}}=2\arctan\sqrt{e^t-1}+C$

$\therefore\int_x^{2\ln 2}\frac{dt}{\sqrt{e^t-1}}=\frac{2\pi}{3}-2\arctan\sqrt{e^x-1}=\frac{\pi}{6}$

$\therefore x=\ln 2.$