高等数学A

第3章 一元函数积分学

3.2 定积分

3.2.4 牛顿莱布尼兹公式

中南大学开放式精品示范课堂高等数学建设组

3.2 定积分

微积分基本公式

- 3.2.4 牛顿莱布尼兹公式
  - 问题的提出
  - 积分上限函数及其导数
  - 积分上限函数习例2-8
  - Newton-Leibniz公式
  - Newton-Leibniz公式习例9-16
- 内容小结

一、问题的提出

变速直线运动中位置函数与速度函数的联系

设某物体作直线运动，已知速度$v=v(t)$是时间间隔$[T_1,T_2]$上t的一个连续函数，且$v(t)\geq 0$，求物体在这段时间内所经过的路程.

变速直线运动中路程为 $\int_{T_1}^{T_2} v(t)dt$

另一方面这段路程可表示为 $s(T_2)-s(T_1)$

$$\therefore \int_{T_1}^{T_2} v(t)dt = s(T_2)-s(T_1).\quad 其中\ s'(t)=v(t).$$

二、积分上限函数及其导数

1. 积分上限函数

设函数 $f(x)$ 在区间$[a,b]$上连续，并且设x为$[a,b]$上的一点，考察定积分

$$\int_a^x f(x)dx = \int_a^x f(t)dt$$

如果上限x 在区间$[a,b]$上任意变动，则对于每一个取定的x 值，定积分有一个对应值，所以它在$[a,b]$上定义了一个函数，

记 $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt.$ 积分上限函数

且 $\Phi(x_0) = \int_a^{x_0} f(t)dt.$

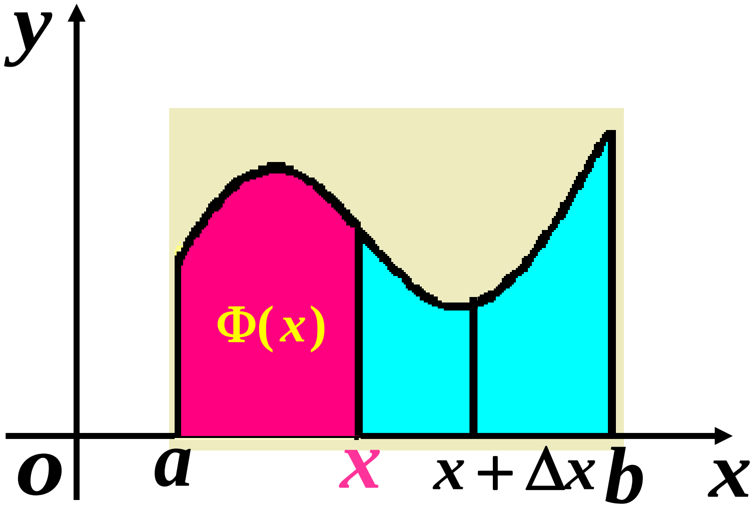
2. 积分上限函数的性质

定理 1 如果 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则积分上限的函数 $\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt$ 在 $[a,b]$ 上具有导数，且它的导数是 $\Phi'(x)=\dfrac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)\qquad (a\le x\le b)$

证 $\Phi(x+\Delta x)=\int_a^{x+\Delta x} f(t)dt$

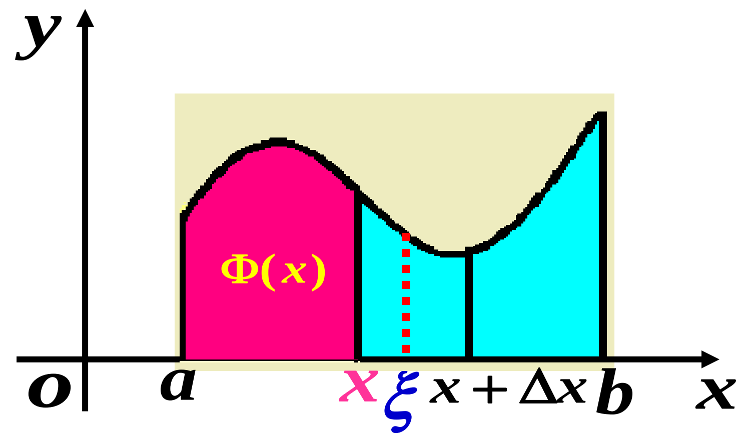
$$\Delta\Phi=\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)$$

$$=\int_a^{x+\Delta x} f(t)dt-\int_a^x f(t)dt$$



$$= \int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt$$

$$= \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt,$$



由积分中值定理得

$$\Delta\Phi = f(\xi)\Delta x \quad \xi \in [x, x+\Delta x],$$

$$\frac{\Delta\Phi}{\Delta x} = f(\xi), \quad \text{且}\Delta x \to 0, \xi \to x,$$

$$\therefore \Phi'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta\Phi}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} f(\xi) = \lim_{\xi\to 0} f(\xi) = f(x).$$

原函数存在定理

结论1 若$f(x)$在$[a,b]$上连续，则原函数一定存在，且

$$\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt$$ 就是$f(x)$在$[a,b]$上的原函数.

例1 分别写出e^{-x^2}与$\dfrac{\sin x}{x}$的一个原函数.

解 e^{-x^2}的一个原函数是 $\Phi(x)=\int_a^x e^{-t^2}dt$,

$\dfrac{\sin x}{x}$的一个原函数是 $\Phi(x)=\int_a^x \dfrac{\sin t}{t}dt$.

结论2 $\frac{d}{dx}\int_a^{\varphi(x)} f(t)dt = \left[\int_a^{\varphi(x)} f(t)dt\right]' = f[\varphi(x)]\cdot\varphi'(x).$

结论3 $\frac{d}{dx}\int_{\varphi(x)}^{b} f(t)dt = \left[\int_{\varphi(x)}^{b} f(t)dt\right]' = -f[\varphi(x)]\cdot\varphi'(x).$

结论4 $\frac{d}{dx}\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t)dt = f[\psi(x)]\cdot\psi'(x) - f[\varphi(x)]\cdot\varphi'(x).$

问: $\frac{d}{dx}\int_a^b f(x)dx = ?$ $\frac{d}{db}\int_a^b f(x)dx = ?$

积分上限函数习例

例2 计算 $\dfrac{d}{dx}\int_{\sin x}^{\cos x}\cos(\pi t^2)dt.$

例3 求由$\int_{y^2}^{0}e^t dt+\int_0^{2x}t^2dt=0$所确定的隐函数$y$对$x$的导数$\dfrac{dy}{dx}$.

例4 设$y=\int_0^x(x-1)(x-2)^2dx$,求其极值点.

例5 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_{\cos x}^{1}e^{-t^2}dt}{x^2}.$

例6 若$f(x)$在$[a,b]$上连续,

$F(x)=\int_a^x f(t)(x-t)dt$,证明$F''(x)=f(x)$.

例 7 设 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内连续，且 $f(x)>0$.证明函数

$$F(x)=\frac{\int_0^x tf(t)dt}{\int_0^x f(t)dt}$$在$(0,+\infty)$内为单调增加函数.

例 8 设 $f(x)$在$[0,1]$上连续，且 $f(x)<1$.证明

$$2x-\int_0^x f(t)dt=1$$在$[0,1]$上只有一个解.

例2 计算 $\dfrac{d}{dx}\int_{\sin x}^{\cos x}\cos(\pi t^2)dt$.

解 $\dfrac{d}{dx}\int_{\sin x}^{\cos x}\cos(\pi t^2)dt$

$$=\cos(\pi\cos^2 x)\cdot(\cos x)'-\cos(\pi\sin^2 x)\cdot(\sin x)'$$

$$=-\cos(\pi\cos^2 x)\cdot\sin x-\cos(\pi\sin^2 x)\cdot\cos x$$

例3 求由$\int_{y^2}^{0} e^t dt + \int_0^{2x} t^2 dt = 0$所确定的隐函数$y$对$x$的导数$\dfrac{dy}{dx}$.

解　方程两边对x求导得,

$$-e^{y^2} 2yy' + 4x^2 \cdot 2 = 0$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{4x^2}{ye^{y^2}}.$$

例4 设$y=\int_0^x (x-1)(x-2)^2 dx$,求其极值点.

解 $\because y'=(x-1)(x-2)^2$,

令$y'=0$,得$x=1, x=2$,

x	$(-\infty,1)$	1	$(1,2)$	2	$(2,+\infty)$
y'	$-$	0	$+$	0	$+$
y	$\searrow$		$\nearrow$		$\nearrow$

$\therefore$ 极小值点为$x=1$.

例5 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_{\cos x}^{1} e^{-t^2}dt}{x^2}$.

分析：这是 $\dfrac{0}{0}$ 型不定式，应用L'Hospital法则.

解

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_{\cos x}^{1} e^{-t^2}dt}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-e^{-\cos^2 x}(\cos x)'}{2x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\cdot e^{-\cos^2 x}}{2x}$$

$$=\frac{1}{2e}.$$

例6 若$f(x)$在$[a,b]$上连续，

$$F(x)=\int_a^x f(t)(x-t)dt,\text{证明}F''(x)=f(x).$$

证 $\because F(x)=x\int_a^x f(t)dt-\int_a^x tf(t)dt$

$$\therefore F'(x)=\int_a^x f(t)dt+xf(x)-xf(x)$$

$$=\int_a^x f(t)dt$$

$$\therefore F''(x)=f(x).$$

例 7 设 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内连续，且 $f(x)>0$.证明函数

$$F(x)=\frac{\int_0^x tf(t)dt}{\int_0^x f(t)dt}$$ 在$(0,+\infty)$内为单调增加函数.

证

$$\because F'(x)=\frac{xf(x)\int_0^x f(t)dt-f(x)\int_0^x tf(t)dt}{\left(\int_0^x f(t)dt\right)^2}$$

$$=\frac{f(x)}{\left(\int_0^x f(t)dt\right)^2}\int_0^x (x-t)f(t)dt,$$

$$\because f(x)>0,\quad (x>0)$$

又$f(x)>0, \quad x\geq t,$

$\therefore (x-t)f(t)\geq 0,$

从而$\int_0^x (x-t)f(t)dt>0,$

$\therefore F'(x)>0 \quad (x>0).$

故$F(x)$在$(0,+\infty)$内为单调增加函数.

例 8　设 $f(x)$ 在[0,1]上连续，且 $f(x)<1$.证明

$$2x-\int_0^x f(t)dt=1 \text{在[0,1]上只有一个解.}$$

证　令 $F(x)=2x-\int_0^x f(t)dt-1$, 在[0,1]上连续,

且 $F(0)=-1<0$,

$$F(1)=1-\int_0^1 f(t)dt=\int_0^1[1-f(t)]dt>0,$$

由零点定理知 $F(x)=0$ 即原方程在[0,1]上至少有一个解;

又 $f(x)<1$, $\therefore F'(x)=2-f(x)>0$,

$F(x)$ 在[0,1]上为单调增加函数.

所以 $F(x)=0$ 即原方程在[0,1]上只有一个解.

三、Newton-Leibniz公式

定理2（微积分基本公式）

如果$F(x)$是连续函数$f(x)$在区间$[a,b]$上的一个原函数，则$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

证 $\because$ 已知$F(x)$是$f(x)$的一个原函数，

又$\because$ $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$也是$f(x)$的一个原函数，

$$\therefore F(x) = \Phi(x) + C \quad x \in [a,b]$$

即 $F(x) = \int_a^x f(t)dt + C$， 令$x = a$，得$F(a) = C$，

$$\therefore F(x)=\int_a^x f(t)dt+F(a),$$

再令$x=b$得$F(b)=\int_a^b f(t)dt+F(a)$,

$$\therefore \int_a^b f(t)dt=F(b)-F(a).$$

注意: (1) $\int_a^b f(x)dx=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a).$

$$\int_a^b f(x)dx=\left[F(x)\right]_a^b=F(b)-F(a).$$

(2) 当$a>b$时, $\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$仍成立.

(3) $\int_a^b f'(x)dx=f(x)\Big|_a^b=f(b)-f(a).$

定积分计算习例

例9 计算$\int_a^b e^x dx$.

例10 计算$\int_{-2}^{-1} \frac{1}{x} dx$.

例11 设$f(x)=\begin{cases} x^2+1 & 0\le x\le 1 \\ 3-x & 1<x\le 3 \end{cases}$,求$\int_0^3 f(x)dx$.

例12 计算$\int_1^3 |x-2| dx$.

例13 计算$\int_{-2}^{2} \max\{x, x^2\} dx$.

例14 设$f(x)=\begin{cases} x^2 & 0\le x<1 \\ x & 1\le x\le 2 \end{cases}$，求$\Phi(x)=\int_0^x f(t)dt$在[0,2]上的表达式，并讨论$\Phi(x)$在(0,2)内的连续性.

例15 设$f(x)$在[0,1]上连续且单调不增，证明对任意的$a\in(0,1)$，有$\int_0^a f(x)dx \ge a\int_0^1 f(x)dx$.

例16 证明不等式：$\left(\int_a^b f(x)dx\right)^2 \le (b-a)\int_a^b f^2(x)dx$.

例9 计算$\int_a^b e^x dx$.

解 $\int_a^b e^x dx = e^x \Big|_a^b = e^b - e^a$.

例10 计算$\int_{-2}^{-1}\frac{1}{x}dx$.

解 $$\int_{-2}^{-1}\frac{1}{x}dx=\left[\ln|x|\right]_{-2}^{-1}=\ln|-1|-\ln|-2|=-\ln 2.$$

注意: $$\int_{-1}^{1}\frac{1}{x^2}dx\neq-\left.\frac{1}{x}\right|_{-1}^{1}=-2$$

例11 设$f(x)=\begin{cases} x^2+1 & 0\le x\le 1 \\ 3-x & 1<x\le 3 \end{cases}$，求$\int_0^3 f(x)dx$.

解 $\int_0^3 f(x)dx=\int_0^1 f(x)dx+\int_1^3 f(x)dx$

$$=\int_0^1 (x^2+1)dx+\int_1^3 (3-x)dx$$

$$=\left(\frac{x^3}{3}+x\right)\Bigg|_0^1+\left(3x-\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_1^3$$

$$=\left(\frac{1}{3}+1\right)-0+\left(9-\frac{9}{2}\right)-\left(3-\frac{1}{2}\right)$$

$$=\frac{10}{3}.$$

例12　计算$\int_1^3 |x-2| dx$.

解 $\int_1^3 |x-2| dx = \int_1^2 |x-2| dx + \int_2^3 |x-2| dx$

$$= \int_1^2 -(x-2) dx + \int_2^3 (x-2) dx$$

$$= \left(2x - \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_1^2 + \left(\frac{x^2}{2} - 2x\right)\Bigg|_2^3$$

$$= (4-2) - \left(2 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{9}{2} - 6\right) - (2-4) = 1.$$

例13 计算$\int_{-2}^{2}\max\{x,x^2\}dx$.

解 $\because f(x)=\max\{x,x^2\}$

$$=\begin{cases} x^2 & -2\le x<0 \\ x & 0\le x<1 \\ x^2 & 1\le x\le 2 \end{cases},$$

$$\therefore \text{原式}=\int_{-2}^{0}x^2dx+\int_{0}^{1}xdx+\int_{1}^{2}x^2dx=\frac{11}{2}.$$

例14 设$f(x)=\begin{cases} x^2 & 0\le x<1 \\ x & 1\le x\le 2 \end{cases}$，求$\Phi(x)=\int_0^x f(t)dt$

在[0,2]上的表达式，并讨论$\Phi(x)$在(0,2)内的连续性.

解 当$0\le x<1$时，$\Phi(x)=\int_0^x f(t)dt=\int_0^x t^2dt=\dfrac{x^3}{3}$；

当$1\le x\le 2$时，$\Phi(x)=\int_0^x f(t)dt=\int_0^1 t^2dt+\int_1^x tdt=\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{1}{6}$.

$$\therefore \Phi(x)=\begin{cases} \dfrac{x^3}{3} & 0\le x<1 \\ \dfrac{x^2}{2}-\dfrac{1}{6} & 1\le x\le 2 \end{cases}$$

当$0 < x < 1$或$1 < x < 2$时,$\Phi(x)$连续,

而$\lim\limits_{x\to 1^-}\Phi(x) = \lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x^3}{3} = \dfrac{1}{3}$,

$$\lim_{x\to 1^+}\Phi(x) = \lim_{x\to 1^+}\left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{6}\right) = \frac{1}{3},$$

$$\Phi(1) = \frac{1}{3},$$

$\therefore \Phi(x)$在$(0,2)$内的连续.

例15 设$f(x)$在$[0,1]$上连续且单调不增,

证明对任意的$a\in(0,1)$,有$\int_0^a f(x)dx \geq a\int_0^1 f(x)dx$.

证 设$\varphi(a)=\frac{1}{a}\int_0^a f(x)dx,\quad (0<a<1)$

且$\varphi(1)=\int_0^1 f(x)dx$.

$$\varphi'(a)=\frac{af(a)-\int_0^a f(x)dx}{a^2}=\frac{\int_0^a f(a)dx-\int_0^a f(x)dx}{a^2}$$

$$=\frac{\int_0^a[f(a)-f(x)]dx}{a^2}\leq 0.\quad \because f(a)\leq f(x)\quad (0<x<a)$$

$\therefore \varphi(a)$单调递减. 故$\varphi(a)\geq\varphi(1)$.

即$\int_0^a f(x)dx \geq a\int_0^1 f(x)dx$.

例16 证明不等式：$\left(\int_a^b f(x)dx\right)^2 \le (b-a)\int_a^b f^2(x)dx.$

证 设$F(x)=\left(\int_a^x f(t)dt\right)^2-(x-a)\int_a^x f^2(t)dt,$

则$F(a)=0,$

$$F'(x)=2f(x)\int_a^x f(t)dt-\int_a^x f^2(t)dt-(x-a)f^2(x)$$

$$=\int_a^x 2f(x)f(t)dt-\int_a^x f^2(t)dt-\int_a^x f^2(x)dt$$

$$=-\int_a^x [f^2(t)-2f(x)f(t)+f^2(x)]dt$$

$$=-\int_a^x [f(t)-f(x)]^2 dt \le 0.$$ 故$F(x)$单调递减.

$\therefore$ 当$b>a$时，$F(b)\le F(a)=0.$

内 容 小 结

1.积分上限函数 $\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt$

2.积分上限函数的导数 $\Phi'(x)=f(x)$

3.微积分基本公式 $\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)$

牛顿－莱布尼茨公式沟通了微分学与积分学之间的关系.

微积分基本公式

设 $f(x)\in C[a,b]$, 且 $F'(x)=f(x)$, 则有

$$\underbrace{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x = \underbrace{f(\xi)(b-a)}_{\text{积分中值定理}} = F'(\xi)(b-a) = \underbrace{F(b)-F(a)}_{\text{微分中值定理}}}_{\text{牛顿－莱布尼兹公式}}$$


ISAAC NEWTON
1643-1727
$\Delta(mv)=F\Delta t$
DEUTSCHE
BUNDESPOST
100
1993


100
1996
GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ 1646-1716 DEUTSCHLAND

Here is my favorite calculus textbook quote of all time, from CALCULUS by Ross L. Finney and George B. Thomas, Jr., ©1990.

If you were being sent to a desert island and could take only one equation with you,

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$$

might well be your choice.