高等数学A

第4章 无穷级数

4.3 幂级数

4.3.1 函数项级数
4.3.2 幂级数及其收敛半径

中南大学开放式精品示范课堂高等数学建设组

4.3 幂级数

幂级数

- 4.3.1函数项级数
  - 函数项级数的定义
  - 收敛点与收敛域
  - 和函数
- 4.3.2 幂级数及其收敛性
  - 幂级数的定义
  - 阿贝尔(Abel)定理
  - 收敛半径与收敛域
  - 标准幂级数收敛半径的求法
  - 标准幂级数收敛域的求法习例1
  - 一般幂级数收敛域的求法
  - 一般幂级数收敛域的求法习例2-3
- 注解　演练例题
- 内容小结与思考

一、函数项级数

1. 定义

设$u_1(x), u_2(x), \cdots, u_n(x), \cdots$是定义在$I \subseteq R$上的函数，则$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x) + \cdots$

称为定义在区间I上的**(函数项) 无穷级数**.

例如级数 $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots,$

$s_n(x) = \sum_{i=1}^{n} u_i(x)$为前$n$项的部分和.

2. 收敛点与收敛域

如果$x_0 \in I$, 数项级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$收敛,

则称x_0为级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$的收敛点,

函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$的所有收敛点的全体称为收敛域,

所有发散点的全体称为发散域.

例1 判别 $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$

的敛散性, 并求其收敛域.

解 这是等比级数.

当 $|x|<1$ 时, 级数收敛, 其和为 $S(x)=\dfrac{1}{1-x}$.

当 $|x|\geq 1$ 时, 级数发散.

故该级数的收敛域为: $x\in(-1, 1)$.

要打开思路!

3. 和函数

在收敛域上, 函数项级数的和是x 的函数$s(x)$,
称$s(x)$为函数项级数的和函数.

$$s(x)=u_1(x)+u_2(x)+\cdots+u_n(x)+\cdots$$ (定义域是?)

函数项级数的部分和 $s_n(x)$, $\lim\limits_{n\to\infty} s_n(x)=s(x)$

余项 $r_n(x)=s(x)-s_n(x)$ $\lim\limits_{n\to\infty} r_n(x)=0$

(x在收敛域上)

注意: (1) 函数项级数在某点x的收敛问题,实质上是数项级数的收敛问题.

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$的和函数的定义域是该函数项级数的收敛域.

例如, 等比级数 $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$

它的**收敛域**是 $(-1,1)$,当$x \in (-1,1)$时, 有和函数

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

它的发散域是 $(-\infty,-1]$ 及 $[1,+\infty)$, 或写作 $|x| \geq 1$.

又如, 级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n + x^{-n}}{n^2}$ $(x \neq 0)$,当$|x| = 1$时收敛,

但当$0 < |x| \neq 1$时, $\lim_{n\to\infty} u_n(x) = \infty$, 级数发散 ;

所以级数的收敛域仅为 $|x| = 1$.

下面我们讨论一种特殊的函数项级数-----幂级数,研究它的收敛性,并考察它的收敛性有什么特殊之处.

二、幂级数及其收敛性

1. 定义

形如

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1 (x - x_0) + \cdots + a_n (x - x_0)^n + \cdots$$

的函数项级数称为幂级数的一般形式.

形如

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

的函数项级数称为幂级数的标准形式.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + \cdots \qquad (1)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1 (x - x_0) + \cdots + a_n (x - x_0)^n + \cdots \qquad (2)$$

令 $X = x - x_0$, 则可将(2)化为(1)的标准形式

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n$$

注1　因经变换后，幂级数(1)与(2)可相互转化，故下面主要讨论形式(1)的幂级数.

类似地，有幂级数的收敛域，和函数的定义。

例 1 讨论 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$ 的敛散性.

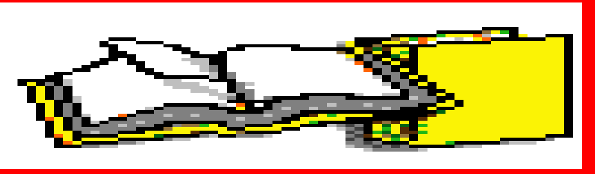
解 $\because s_n(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1} = \dfrac{1-x^n}{1-x} \quad (|x| \neq 1)$

当 $|x| < 1$ 时, $\lim\limits_{n\to\infty} s_n(x) = \dfrac{1}{1-x}$,

当 $|x| \geq 1$ 时, $\lim\limits_{n\to\infty} s_n(x)$ 不存在.

$$\therefore \sum_{n=0}^{\infty} x^n \begin{cases} \text{收敛于}\dfrac{1}{1-x}, & \text{当}|x| < 1\text{时} \\ \text{发散}, & \text{当}|x| \geq 1\text{时} \end{cases}.$$

本节的主要任务



1　怎样确定幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛域呢？

2　若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛域为D,则在收敛域中其和函数$S(x)$=?

定理 1. (Abel定理)若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

在 $x = x_0$ 点收敛 , **则对满足不等式** $|\,x\,| < |\,x_0\,|$

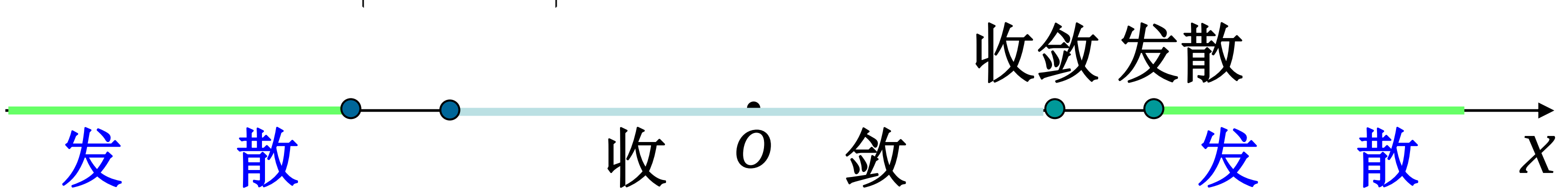
的一切 x 幂级数都绝对收敛.

反之, 若当 $x = x_0$ **时该幂级数发散 , 则对满足不等式**

$|\,x\,| > |\,x_0\,|$ **的一切 x , 该幂级数也发散 .**

证: 设 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ **收敛, 则必有** $\lim\limits_{n\to\infty} a_n x_0^n = 0$**,于是存在**

常数 $M > 0$, 使 $|\,a_n x_0^n\,| \le M \quad (n = 1, 2, \cdots)$



$$|a_n x^n| = \left| a_n x_0^n \frac{x^n}{x_0^n} \right| = |a_n x_0^n| \cdot \left| \frac{x}{x_0} \right|^n \leq M \left| \frac{x}{x_0} \right|^n$$

当 $|x| < |x_0|$ 时, $\sum_{n=0}^{\infty} M \left| \frac{x}{x_0} \right|^n$ 收敛, $\therefore \sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$ 也收敛,

故原幂级数绝对收敛 .

反之, 若当 $x = x_0$ 时该幂级数发散 ,下面用反证法证之.

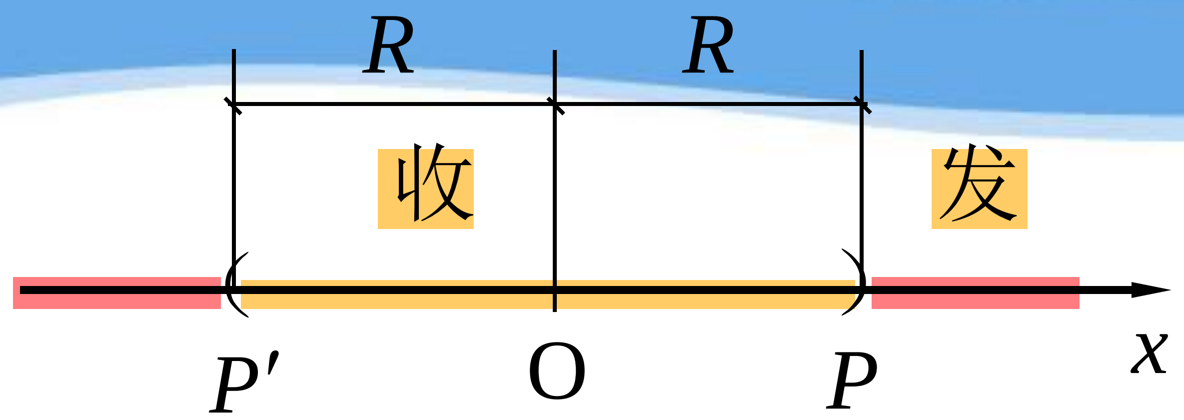
假设有一点 x_1 满足 $|x_1| > |x_0|$ 且使级数收敛 , 则由前面的证明可知, 级数在点 x_0 也应收敛, 与所设矛盾,

故假设不真. 所以若当 $x = x_0$ 时幂级数发散 , 则对一切满足不等式 $|x| > |x_0|$ 的 x , 原幂级数也发散 .　证毕

由以上的分析发现:

如果幂级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内既有收敛点, 又有发散点, 则从坐标原点开始沿数轴往右(左)走，最初只可能遇到它的收敛点，然后就会只遇到它的发散点, 这两部分的分界点 $P\,(P')$ 是关于坐标原点对称的, 幂级数在分界点处可能收敛, 也可能发散.

现将以上的分析用图表示出来.



幂级数在一个以坐标原点为中心的对称区间 $(-R,\ R)$ 内收敛, 在此区间外发散 , 在区间端点处幂级数可能收敛 , 也可能发散 .

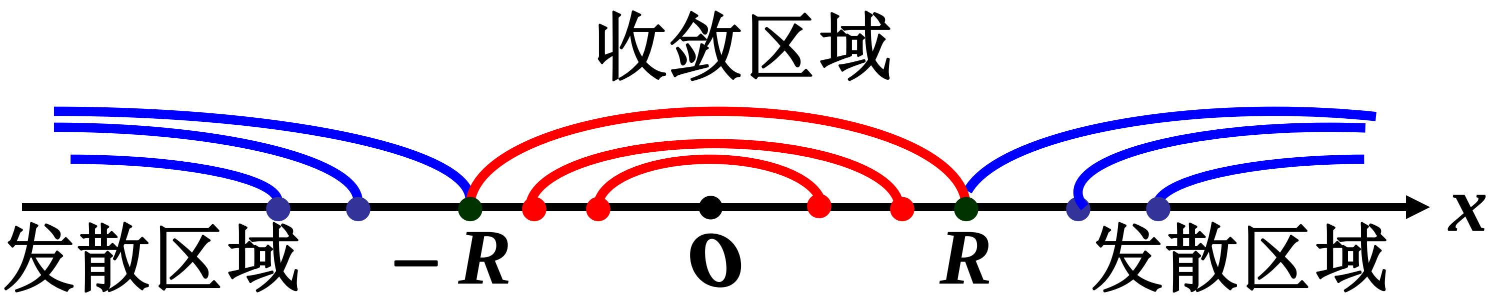
此时称 $(-R,\ R)$ 为幂级数的收敛区间,

R 称为幂级数的收敛半径.

当幂级数仅在 $x=0$ 处收敛, 则规定取 $R=0$.

注意： Abel定理对标准幂级数给出.

几何说明



问：在$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x-2)^n$处$x=-1$收敛，在$x=4$处？

推论

如果幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$不是仅在$x = 0$一点收敛, 也不是在整个数轴上都收敛, 则必有一个完全确定的正数R存在, 它具有下列性质:

当$|x| < R$时, 幂级数绝对收敛;

当$|x| > R$时,幂级数发散;

当$x = R$与$x = -R$时, 幂级数可能收敛也可能发散.

3. 收敛半径与收敛域、收敛区间

定义： 正数R称为幂级数的收敛半径.

幂级数的收敛区间 是开区间 $(-R, R)$,

幂级数的收敛域包括幂级数的收敛区间及端点情况.

$(-R, R)$, $[-R, R)$, $(-R, R]$, $[-R, R]$.

规定 (1) 幂级数只在$x = 0$处收敛, $R = 0$, 收敛域为$\{0\}$;

(2) 幂级数对一切x 都收敛, $R = +\infty$, 收敛域$(-\infty, +\infty)$.

问题 如何求幂级数的收敛半径?

4. 标准幂级数收敛半径、收敛域的求法

定理 2 如果幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$的所有系数$a_n \neq 0$,

设 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \rho$ (或 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \rho$)

(1) 则当$\rho \neq 0$时,$R = \frac{1}{\rho}$; (2) 当$\rho = 0$时,$R = +\infty$;

(3) 当$\rho = +\infty$时,$R = 0$.

你能证明吗?

有点像达朗贝尔判别法?

证 (1)若 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\rho(\neq 0)$

则 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right||x|=\rho|x|$

则比值审敛法得:

当$\rho|x|<1$即$|x|<\dfrac{1}{\rho}$时，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$绝对收敛;

当$\rho|x|>1$即$|x|>\dfrac{1}{\rho}$时，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$发散;

当$\rho|x|=1$即$|x|=\dfrac{1}{\rho}$时，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$可能收敛可能发散.

$\therefore R=\dfrac{1}{\rho}$.

(2)若 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \rho = 0,$

$$\text{则 } \lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right||x| = \rho|x| = 0 < 1$$

对一切x, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$绝对收敛. $\therefore R = +\infty.$

(3)若 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \rho = +\infty,$

$$\text{则 } \lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right||x| = +\infty \quad (|x| \neq 0)$$

则 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$, 故 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$发散. $\therefore R = 0.$ 定理证毕.

求$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$的收敛半径与收敛域的步骤：

(1)计算$\rho = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$;

(2)由ρ的值得$R = \frac{1}{\rho}$;

(3)由数项级数判定$x = \pm R$时$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$的敛散性得收敛域$[-R, R]$或$[-R, R)$或$(-R, R]$或$(-R, R)$.

标准幂级数收敛域的求法习例

例 2 求下列幂级数的收敛半径和收敛域

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}$ (2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n+6^n}{2^n}x^n$

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-nx)^n$ (4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$

例 3 求幂级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2^n}$ 的收敛域．

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}$

解 $\because \rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{(n+1)^2}=1,$

$\therefore$ 收敛半径$R=1.$

当$x=1$时,原幂级数成为$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, 收敛.

当$x=-1$时,原幂级数成为$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$,绝对收敛.

$\therefore$ 收敛域为$[-1,1]$.

$(2)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n+6^n}{2^n}x^n$

解 $\because \rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}+6^{n+1}}{2^{n+1}}\cdot\frac{2^n}{(-1)^n+6^n}\right|$

$$=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-\frac{1}{6})^{n+1}+1}{2}\cdot\frac{1}{(-\frac{1}{6})^n\frac{1}{6}+\frac{1}{6}}\right|=3,\qquad \therefore R=\frac{1}{3}.$$

当$x=\frac{1}{3}$时,原幂级数成为$\sum_{n=1}^{\infty}[(-\frac{1}{6})^n+1]$, 发散.

当$x=-\frac{1}{3}$时,原幂级数成为$\sum_{n=1}^{\infty}[(\frac{1}{6})^n+(-1)^n]$, 发散.

$\therefore$收敛域为$(-\frac{1}{3},\frac{1}{3})$.

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}(-nx)^n$

解 $\because \rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{n+1}}{n^n}$

$$=\lim_{n\to\infty}(n+1)(1+\frac{1}{n})^n=+\infty,$$

$\therefore R=0,$

级数只在$x=0$处收敛.

$$(4)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

解 $\because \rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0,$

$\therefore R=+\infty,$

收敛域$(-\infty,+\infty)$.

例 3 求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2^n}$的收敛域．

解 $\because$ 级数为$\frac{x}{2}+\frac{x^3}{2^2}+\frac{x^5}{2^3}+\cdots$ 缺少偶次幂的项

应用比值判别法,

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{2n+1}/2^{n+1}}{x^{2n-1}/2^n}\right| = \frac{1}{2}|x|^2,$$

当$\frac{1}{2}|x|^2<1$, 即$|x|<\sqrt{2}$时, 级数绝对收敛,

当$\frac{1}{2}|x|^2>1$, 即$|x|>\sqrt{2}$时, 级数发散,

当$x=\sqrt{2}$时，级数为$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2}}$，　级数发散，

当$x=-\sqrt{2}$时，级数为$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-1}{\sqrt{2}}$，　级数发散，

原级数的收敛域为 $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$.

5. 一般幂级数收敛域的求法

对于$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$有两种方法求其收敛域.

方法 1.

(1)令$x-x_0=y$,得$\sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n$;

(2)由标准幂级数收敛域的求法可得:

$|y|<R$,同时讨论$y=\pm R$的情况;

(3)再由$y=x-x_0$,求得x满足的不等式,即为x的区域.

方法 2.

(1)计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \rho,$

(2)当 $|x-x_0| < \dfrac{1}{\rho}$ 时, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ 绝对收敛;

$|x-x_0| > \dfrac{1}{\rho}$ 时, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ 发散;

再讨论 $x-x_0 = \pm\dfrac{1}{\rho}$ 时, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ 的敛散性可得所求.

方法 3. (用比值法讨论)

(1)计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \rho(x)$;

(2) $\rho(x) < 1$时, 原级数绝对收敛;

$\rho(x) < 1$时, 原级数发散;

(3) $\rho(x)=1$时, 原级数化为常数项级数, 再讨论其敛散性

一般幂级数收敛域的求法习例

例 4　求$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{2^n n}$的收敛域.

例5　求下列幂级数的收敛半径及收敛域:

$(1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(2x+1)^n$　　$(2)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(\frac{x}{2})^n$

例 3　求 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{2^n n}$ 的收敛域.

解　令 $x-1=y$, 得 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{y^n}{2^n n}$,

方法一

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{2^n n}{2^{n+1}(n+1)}=\frac{1}{2},\ \therefore R=2.$$

当 $y=2$ 时, 可得 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散,

当 $y=-2$ 时, 可得 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ 收敛.

$\therefore -2\le y<2$, 从而 $-2\le x-1<2\Rightarrow -1\le x<3$

$\therefore$ 收敛域为 $[-1,3)$.

方法二

由 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{2^n n}{2^{n+1}(n+1)}\right| = \frac{1}{2}, R = 2$

当$|x-1| < 2$即$-1 < x < 3$时, 原幂级数绝对收敛;

当$|x-1| > 2$即$x < -1$或$x > 3$时, 原幂级数发散;

当$x = 3$时, 原幂级数成为$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, 发散,

当$x = -1$时, 原幂级数成为$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$, 收敛.

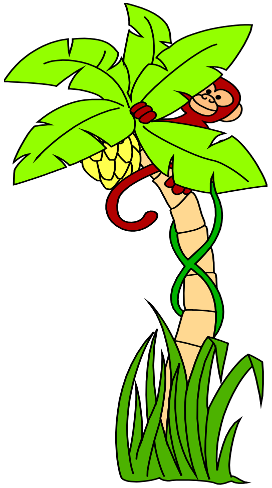
$\therefore$ 收敛域为$[-1,3)$.

例5 求下列幂级数的收敛半径及收敛域:

$$(1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(2x+1)^n \qquad (2)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(\frac{x}{2})^n$$

解 (1)令$2x+1=t$, 则原级数变为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n}$

因$R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=1$



则此幂级数的收敛区间为$(-1,1)$.

而当$t=-1$时, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ 收敛;

而当$t=1$时, 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散.

故当$-1\le 2x+1<1$时, 即$-1\le x<0$时,级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(2x+1)^n$ 收敛.

即原级数收敛域为$[-1,0)$, 收敛半径为 $R=\frac{1}{2}$.

$$(2)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{x}{2}\right)^n$$

解 (2)令 $\frac{x}{2}=t$, 则原级数变为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n}$

由(1)知, 则此幂级数的收敛区间为$[-1,1)$而$R=1$

故 $-1\le\frac{x}{2}<1$, 即 $-2\le x<2$ 时, 原幂级数收敛.

即原级数收敛区间为$[-2, 2)$, 收敛半径为$R=2$.

内容小结与思考

求幂级数收敛域的方法

1) 对标准型幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \ (a_n \neq 0)$

先求收敛半径 , 再讨论端点的收敛性 .

2) 对非标准型幂级数(缺项或通项为复合式)

求收敛半径时直接用比值法或根值法,

也可通过换元化为标准型再求 .

思考：幂级数收敛域和收敛区间的区别?

请同学们 求下列幂级数的收敛域:

$$(1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{x^n}(x\neq 0)\qquad (2)\sum_{n=1}^{\infty}ne^{-nx}\qquad (3)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+x)^n}{n^{n+x}}$$

提示:
$$(1).\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)^2}{x^{n+1}}\cdot\frac{x^n}{n^2}\right|=\left|\frac{1}{x}\right|$$

$$(2)\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n(x)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n}}{e^x}=\frac{1}{e^x}$$

$$(3)\lim_{n\to\infty}\frac{u_n(x)}{1/n^x}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+x)^n}{n^n}=\lim_{n\to\infty}(1+\frac{x}{n})^n=e^x$$