高等数学(上)综合自测题(一)

一、填空题(本题 15 分，每小题 3 分)

1. 设 $f(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$ ， 则 $f^{(n)}(x)=\underline{\dfrac{(-1)^n 2\cdot n!}{(1+x)^{n+1}}}$

2. $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2+4x+8}=\underline{\frac{\pi}{8}}$

3. 心形线 $r=a(1+\cos\theta)$ 的全长为 $\underline{8a}$

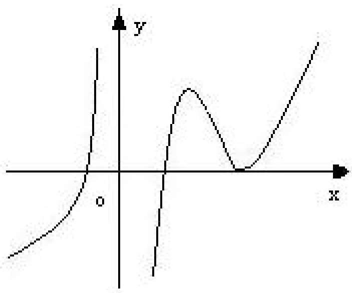
4. 已知幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x+2)^n$ 在 $x=0$ 处收敛，在 $x=-4$ 处发散，则幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-3)^n$ 的收敛域为 $\underline{(1,5]}$

5. 已知 $f(x)=x(x-a)^3$ 在 $x=1$ 处取极值，则 $a=\underline{4}$

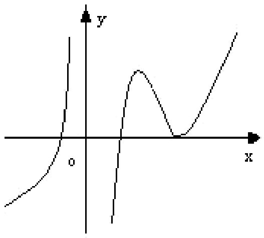
二、选择题(本题 15 分，每小题 3 分)

1. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x+e^{2ax}-1}{x}, & x\neq 0\\ a & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则 $a=$ （ D ）

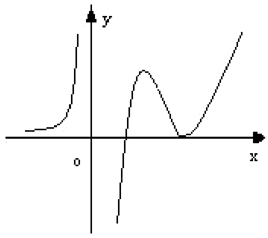
（A） 1　　（B） 0　　（C）e　（D）-1



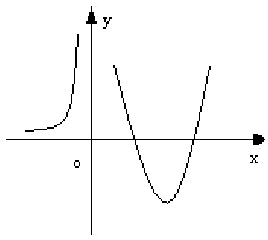
2. 设函数 $f(x)$ 在定义域内可导，$y=f(x)$ 的图形如右图所示， 则导函数 $y=f'(x)$ 的图形为（　C　）



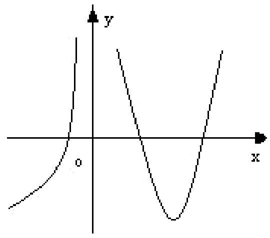
(A)



(B)



(C)



(D)

3. 设 $f(x)$ 连续，且 $F(x)=\int_x^{e^{-x}} f(t)\mathrm{d}t$，则 $F'(x)$ 为（ A ）.

（A）$-e^{-x}f(e^{-x})-f(x)$　　（B）$-e^{-x}f(e^{-x})+f(x)$

（C）$e^{-x}f(e^{-x})-f(x)$　　（D）$e^{-x}f(e^{-x})+f(x)$

4. 设 $f(x)$ 是连续函数，且 $f(x)=x+2\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$，则 $f(x)=$（ C ）

(A) $\frac{x^2}{2}$　　**(B)** $\frac{x^2}{2}+2$　　**(C)** $x-1$　　**(D)** $x+2$

5. 设 $f(x)$ 是周期为 π 的周期函数，它在 $[-\pi,\pi)$ 上的表达式为 $f(x)=x$，设 $S(x)$ 为 $f(x)$

在 $(-\infty.+\infty)$ 上 Fourier 级数展开式的和函数，则 $S(x)$=(C)

(A) $S(x)=f(x)$　　(B) $S(x)=\begin{cases}0, & x=(2k+1)\pi \\ x, & x\neq(2k+1)\pi\end{cases}, k=0,\pm1,\pm2,\cdots$

(C) $S(x)=x$　　(D) $S(x)=\begin{cases}0, & x=(2k+1)\pi \\ f(x), & x\neq(2k+1)\pi\end{cases}, k=0,\pm1,\pm2,\cdots$

三. (10 分) 设函数 $f(x)$ 有连续导数，且 $f'(1)=3$，求极限 $\lim\limits_{x\to0^+}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(\cos\sqrt{x})\right]$.

解. 因 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(\cos\sqrt{x})=f'(\cos\sqrt{x})(-\sin\sqrt{x})\frac{1}{2\sqrt{x}}$，所以

$$\lim_{x\to0^+}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(\cos\sqrt{x})\right]=\lim_{x\to0^+}f'(\cos\sqrt{x})\cdot\left(-\frac{\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}\right)=f'(1)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{3}{2}.$$

四、(16分，每小题8分)求解下列各题

1. 求 $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{\frac{1}{x}}+1}{e^{\frac{1}{x}}-1}\arctan\frac{1}{x}$.

2. 设 $\begin{cases} x=2t-1 \\ te^y+y+1=0 \end{cases}$ 确定 $y=y(x)$，求 $\left.\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=0}$

解. 1. 因 $\lim\limits_{x\to0^+}e^{\frac{1}{x}}=+\infty$，$\lim\limits_{x\to0^-}e^{\frac{1}{x}}=0$，故

$$\lim_{x\to0^+}\frac{e^{\frac{1}{x}}+1}{e^{\frac{1}{x}}-1}\arctan\frac{1}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{1+e^{-\frac{1}{x}}}{1-e^{-\frac{1}{x}}}\lim_{x\to0^+}\arctan\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2},$$

$$\lim_{x\to0^-}\frac{e^{\frac{1}{x}}+1}{e^{\frac{1}{x}}-1}\arctan\frac{1}{x}=\lim_{x\to0^-}\frac{e^{\frac{1}{x}}+1}{e^{\frac{1}{x}}-1}\lim_{x\to0^-}\arctan\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2},$$ 因此，$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{\frac{1}{x}}+1}{e^{\frac{1}{x}}-1}\arctan\dfrac{1}{x}=\dfrac{\pi}{2}$

2. 由 $t=\frac{1}{2}(x+1)$ 得 $(x+1)e^y+2y+2=0$

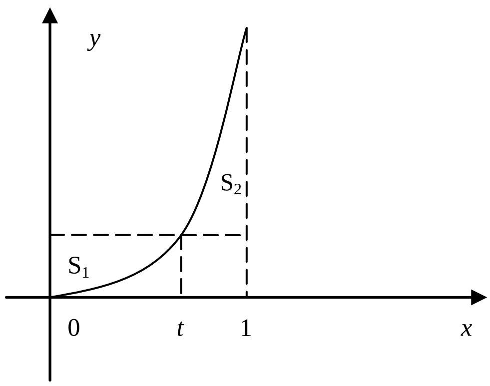
上式对 x 求导得 $e^y+(x+1)e^yy'+2y'=0$ （1）

再对 x 求导得 $2e^yy'+(x+1)e^y(y')^2+(x+1)e^yy''+2y''=0$ （2）

$t=0$ 时得 $x=-1, y=-1$，代入（1）式得 $y'|_{t=0}=-\frac{1}{2}e^{-1}$。代入（2）式得 $\left.\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=0}=\dfrac{1}{2}e^{-2}$.

五.（16分，每小题8分）求解下列各题：

1. 在闭区间 $[0,1]$ 上给定函数 $y=x^2$，点 t 在什么位置时，面积 S_1 和 S_2 之和分别具有最大值和最小值？



2、$\displaystyle\int_0^{N\pi}\sqrt{1-\sin2x}\,\mathrm{d}x$

解 1. $S_1=\int_0^t(t^2-x^2)\mathrm{d}x=\frac{2}{3}t^3$，

$S_2=\int_t^1(x^2-t^2)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}-t^2+\frac{2}{3}t^3$，

令 $(S_1+S_2)'_t=0$，即 $4t^2-2t=0$，解得 $t_1=0, t_2=\frac{1}{2}$. 又

$S_1(0)+S_2(0)=\frac{1}{3}$，$S_1\left(\frac{1}{2}\right)+S_2\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}$，$S_1(1)+S_2(1)=\frac{2}{3}$，故当 $t=1$ 时，$\max(S_1+S_2)=\frac{2}{3}$；当 $t=\frac{1}{2}$ 时，$\min(S_1+S_2)=\frac{1}{4}$.

2. $\displaystyle\int_0^{N\pi}\sqrt{1-\sin2x}\,\mathrm{d}x=N\int_0^{\pi}|\sin x-\cos x|\mathrm{d}x$

$$=N\left[\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos x-\sin x)\mathrm{d}x+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}(\sin x-\cos x)\mathrm{d}x\right]=2\sqrt{2}N$$

六. (10 分) 设 $f(x)=x^3\sin x$，求 $f^{(10)}(0)$.

解：因为 $f(x)=x^3(x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}-\dfrac{x^7}{7!}+\cdots)$，又 $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$，

比较得 $\dfrac{f^{(10)}(0)}{10!}=-\dfrac{1}{7!}$，即 $f^{(10)}(0)=10!\left(-\dfrac{1}{7!}\right)=-720$.

七、(10 分) 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}(x-4)^n$ 的收敛域及和函数 $S(x)$.

解. $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{n+1}{n}\right|=1$，所以，$-1<x-4<1$，$3<x<5$.当 $x=3$ 时，

级数成为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(-\dfrac{1}{n}\right)$，由调和级数知发散；当 $x=5$ 时，级数成为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}$，由交错级数的

Leibniz 判别法知此级数是收敛的. 所以收敛区间为 $(-3,5]$.设 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}(x-4)^n$，

则 $S'(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(x-4)^{n-1}=\dfrac{1}{1+(x-4)}=\dfrac{1}{x-3}$，所以，和函数为

$$S(x)=\ln(x-3),\quad (3<x\le 5).$$

八、(8 分)设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可微，且满足 $f(1)=2\int_0^{\frac{1}{2}}xf(x)\mathrm{d}x$，试证在 $[0,1]$ 内至少有一点 θ，使 $f'(\theta)=-\dfrac{f(\theta)}{\theta}$.

证. 由积分中值定理，存在 $\eta\in\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$，有

$$f(1)=2\int_0^{\frac{1}{2}}xf(x)\mathrm{d}x=2\times\frac{1}{2}\times\eta f(\eta)=\eta f(\eta)$$

令 $F(x)=xf(x)$，则 $\boldsymbol{F(x)}$ 在 $[\eta,1]$ 上连续，且有 $F(1)=f(1)=\eta f(\eta)=F(\eta)$，由 Rolle 定理，存在 $\theta\in[\eta,1]$ 使 $F'(\theta)=f(\theta)+\theta f'(\theta)=0$，从而 $f'(\theta)=-\dfrac{f(\theta)}{\theta}$.

高等数学(上)综合自测题(二)

一、填空题（每小 3 分，共 15 分）

1. 设 $f\left(\sin\dfrac{x}{2}\right)=\cos x+1$，则 $f\left(\cos\dfrac{x}{2}\right)=\underline{1-\cos x}$

2. 设 $f(x)=(1+\cos x)^{x+1}\sin(x^2-3x)$，则 $f'(0)=\underline{-6}$

3. 设 $f\left(x\right)$ 在 $\left(0,+\infty\right)$ 内可导，且当 $x>0$ 时, 有 $\int f(x^3)\mathrm{d}x=(x-1)e^{-x}+C$, 则 $f(1)=\underline{e^{-1}}$

4. 设 $f(x)=\begin{cases}x+\pi,-\pi\le x<0\\0,x=0\\1,0<x\le\pi\end{cases}$ 的以 2π 为周期的 Fourier 级数的和函数为 $S(x)$，则 $S(x)$ 在

$\left[-\pi,\pi\right]$ 上的表达式为 $S(x)=\underline{\begin{cases}x+\pi, & -\pi<x<0,\\1, & 0<x<\pi,\\\dfrac{\pi+1}{2}, & x=0,\\\dfrac{1}{2}, & x=\pm\pi.\end{cases}}$

5. 设函数 $F(x)$ 是 $\dfrac{\ln x}{x}$ 的一个原函数，则 $\mathrm{d}F(e^{\frac{x}{2}})=\underline{\dfrac{x}{4}\mathrm{d}x}$

二、选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1. 若 $f(x)=\dfrac{e^x-a}{x(x-1)}$， $x=0$ 为无穷间断点， $x=1$ 为可去间断点，则 $a=$（ C ）.

（A）1; （B）0; （C）e ; （D）e^{-1}

2. 设 $f\left(x\right)$ 在 $x=0$ 的某个邻域内连续，且 $f(0)=0$，$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{2\sin^2\dfrac{x}{2}}=1$，则在点 $x=0$ 处

$f(x)$（ D ）

（A）不可导 （B）可导，且 $f'(0)\neq0$ （C）取得极大值 （D）取得极小值

3. 若 $f(-x)=f(x)(-\infty<x<+\infty)$，在 $\left(-\infty,0\right)$ 内 $f'(x)>0, f''(x)<0$ 内，则在 $(0,+\infty)$

（ C ）

（A） $f'(x)>0, f''(x)<0$ （B） $f'(x)>0, f''(x)>0$

（C） $f'(x)<0, f''(x)<0$ （D） $f'(x)<0, f''(x)>0$

4. 设 $f\left(x\right)$ 在 $\left[a,b\right]$ 上二阶可导，且 $f(x)>0, f'(x)<0, f''(x)<0.$ 记

$S_1=\int_a^b f(x)dx$ $S_2=f(b)(b-a)$， $S_3=\dfrac{f(a)+f(b)}{2}(b-a)$，则有（ B ）.

（A） $S_1<S_2<S_3$ （B） $S_2<S_3<S_1$ （C） $S_3<S_1<S_2$ （D） $S_1<S_3<S_2$

5. 设幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n$ 的收敛半径分别为 $\frac{\sqrt{5}}{3}$ 与 $\frac{1}{3}$，则幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2}{b_n^2} x^n$ 的收敛半径为（ A ）

（A）5　　（B）$\frac{\sqrt{5}}{3}$　　（C）$\frac{1}{3}$　　（D）$\frac{1}{5}$

三、解答下列各题（每小题 6 分，共 30 分）：

1. 求曲线 $\begin{cases} x = \ln(1+t^2) \\ y = \frac{\pi}{2} - \arctan t \end{cases}$ 的与直线 $x + 2y = 0$ 平行的切线方程.

解. 因为 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{1}{2t}$，直线的斜率为 $k = -\frac{1}{2}$，由条件有 $-\frac{1}{2t} = -\frac{1}{2}$，故 $t = 1$. 从而切点为 $P\left(\ln 2, \frac{\pi}{4}\right)$，于是所求切线方程为 $y - \frac{\pi}{4} = -\frac{1}{2}(x - \ln 2)$，即 $2x + 4y - \pi - 2\ln 2 = 0$.

2. 求曲线 $y = \ln(1-x^2)\ \ (0 \le x \le \frac{1}{2})$ 的弧长.

解. 因为 $y' = \frac{-2x}{1-x^2}, \sqrt{1+y'^2} = \frac{1+x^2}{1-x^2}$，

所以 $s = \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1+x^2}{1-x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2} + \ln 3$.

3. 设 $f(x)$ 具有二阶导数，$F(x) = \lim_{t \to \infty} t^2 \left[f(x + \frac{2}{t}) - f(x) \right] \sin\frac{x}{t}$. 求 $\mathrm{d}F\left(x\right)$

解. 令 $h = \frac{1}{t}$，则 $F(x) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x+2h) - f(x)}{h} \cdot \frac{\sin hx}{h} = 2xf'(x)$.

从而 $F'(x) = 2f'(x) + 2xf''(x)$，$\mathrm{d}F(x) = F'(x)dx = 2[f'(x) + xf''(x)]\mathrm{d}x$.

4. $y = \left[x\right]$ 表示不超过 x 的最大整数，计算 $\int_{-2}^{10} \left(x - \left[x\right]\right) \mathrm{d}x$.

解. $f(x) = x - \left[x\right]$ 是周期为 1 的可积函数，根据周期函数定积分的性质，有

$\int_{-2}^{10} \left(x - \left[x\right]\right) \mathrm{d}x = 12\int_0^1 \left(x - \left[x\right]\right) \mathrm{d}x = 12\int_0^1 x\mathrm{d}x = 6$.

5. 将函数 $f(x) = \frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x} + \frac{1}{2}\arctan x - x$ 展开成 x 的幂级数.

解. $f'(x) = \frac{1}{4}(\frac{1}{1+x} - \frac{1}{1-x}) + \frac{1}{2}\frac{1}{1+x^2} - 1 = \frac{1}{1-x^4} - 1 = \sum_{n=1}^{\infty} x^{4n}$，$(-1 < x < 1)$，

且 $f(0)=0$. 积分得

$$f(x)=\int_0^x f'(t)\mathrm{d}t=\int_0^x\left(\sum_{n=1}^{\infty}t^{4n}\right)\mathrm{d}t=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n+1}x^{4n+1},\quad (-1<x<1).$$

四.（ 8 分）设 $f\left(x\right)$ 在 $\left[0,2a\right]$ 上连续，且 $f(0)=f(2a)$，试证在 $\left[0,a\right]$ 上至少存在一点 ξ，使 $f(\xi)=f(\xi+a)$.

证. 作辅助函数 $F(x)=f(x+a)-f(x),x\in[0,a]$, 则 $F\left(x\right)$ 在 $\left[0,a\right]$ 上连续,

且 $F(0)=f(a)-f(0),F(a)=f(2a)-f(a)$. 依题意 $f(0)=f(2a)$, 则

$F(a)=f(0)-f(a)=-F(0)$.

若 $f\left(0\right)=f\left(a\right)$, 则 $F\left(0\right)=F\left(a\right)=0$, 取 $\xi=0$ 或 a, 得结论成立;

若 $f(0)\neq f(a)$, 则 $F(0)\cdot F(a)<0$, 由闭区间上连续函数的零点定理知, 至少存在一点

$\xi\in(0,a)$ 使 $F(\xi)=0$, 即 $f(\xi)=f(\xi+a)$.

五（8 分）试确定常数 a,b 的值，使 $f(x)=\begin{cases}3e^{2x}-bx, & x<0,\\ \sqrt{a+x}+\sin 5x, & x\geq 0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处可导.

解. 先讨论 $f\left(x\right)$ 在 $x=0$ 处的连续性,

$f(0-0)=\lim\limits_{x\to 0^-}(3e^{2x}-bx)=3), f(0+0)=\lim\limits_{x\to 0^+}(\sqrt{a+x}+\sin 5x)=\sqrt{a}$. 因 $f\left(x\right)$ 在 $x=0$ 处可导必连续, 则 $f(0-0)=f(0+0)=f(0)$, 从而得 $\sqrt{a}=3$, 即 $a=9$.

再讨论 $f\left(x\right)$ 在 $x=0$ 处的可导性.

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{3e^{2x}-bx-\sqrt{a}}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{3(e^{2x}-1)}{x}+b=6+b,$$

$$\begin{aligned}f'_+(0)&=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{a+x}+\sin 5x-\sqrt{a}}{x}=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\sqrt{a+x}-\sqrt{a}}{x}+\frac{\sin 5x}{x}\right)\\&=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\sqrt{a+x}+\sqrt{a}}+5=\frac{1}{2\sqrt{a}}+5,\end{aligned}$$

由 $f'_-(0)=f'_+(0)$ 得 $6+b=\dfrac{1}{2\sqrt{a}}+5$, 则 $b=-\dfrac{5}{6}$. 因此当 $a=9,b=-\dfrac{5}{6}$ 时, $f\left(x\right)$ 在 $x=0$ 处可导.

六（8 分）设 $f\left(x\right)$ 在 $\left[a,b\right](0<a<b)$ 上连续，在 (a,b) 内可导，证明在 (a,b) 内存在 ξ,η 使得 $f'(\xi)=\dfrac{\eta^2}{ab}f'(\eta)$.

证. 对 $f\left(x\right)$ 和 $g(x)=\dfrac{1}{x}$ 在 $\left[a,b\right]$ 上应用 Cauchy 中值定理，存在 $\eta\in(a,b)$ 使

$\dfrac{f(b)-f(a)}{\frac{1}{b}-\frac{1}{a}}=\dfrac{f'(\eta)}{-\frac{1}{\eta^2}}=-\eta^2 f'(\eta)$，即 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=\dfrac{\eta^2 f'(\eta)}{ab}$. 由 Lagrange 中值定理知,存在 $\xi\in(a,b)$,使得 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi)$，于是 $f'(\xi)=\dfrac{\eta^2 f'(\eta)}{ab}$.

七（8 分）设曲线 $\begin{cases}x=at^3\\ y=t^2-bt\end{cases}$ $(a>0,b>0)$ 在 $t=1$ 时切线斜率为 $\dfrac{1}{3}$，问 a,b 为何值时，曲线与 x 轴所围部分面积最大？

解. 因 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{2t-b}{3at^2},\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=1}=\dfrac{2-b}{3a}$. 依题意，曲线在 $t=1$ 时切线斜率为 $\dfrac{1}{3}$，则 $\dfrac{2-b}{3a}=\dfrac{1}{3}$，即 $a+b=2$. 又曲线与 x 轴两交点坐标分别对应 $t=0$ 和 $t=b$，则所求面积

$S=\left|\int_0^b(t^2-bt)3at^2\mathrm{d}t\right|=\dfrac{3}{20}ab^5$.

从而 $S(b)=\dfrac{3}{20}(2-b)b^5,b>0$.

令 $S'(b)=\dfrac{3}{20}b^4(10-6b)=0$，得 $b=\dfrac{5}{3}$.

当 $0<b<\dfrac{5}{3}$ 时，$S'(b)>0$，而当 $b>\dfrac{5}{3}$ 时，$S'(b)<0$.

所以 $b=\dfrac{5}{3}$ 是 $S(b)$ 的惟一极大值点，也是最大值点，因此当 $a=\dfrac{1}{3},b=\dfrac{5}{3}$ 时，曲线与 x 轴所围成的面积最大.

八、（8 分）设 $a_n=\int_0^{n\pi}x\left|\sin x\right|\mathrm{d}x\quad(n=1,2,\cdots)$，试求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{3^n}$ 的和.

解. 令 $x=n\pi-t$，则 $a_n=\int_0^{n\pi}(n\pi-t)\left|\sin t\right|\mathrm{d}t=n\pi\int_0^{n\pi}\left|\sin t\right|\mathrm{d}t-\int_0^{n\pi}t\left|\sin t\right|\mathrm{d}t$,

从而 $a_n=\dfrac{n\pi}{2}\int_0^{n\pi}\left|\sin t\right|\mathrm{d}t=\dfrac{n\pi}{2}\cdot n\int_0^{\pi}\sin t\mathrm{d}t=n^2\pi,(n=1,2,\cdots)$,

于是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{3^n}=\pi\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2}{3^n}$.

考虑幂级数$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n = S(x), |x| < 1$

已知$\sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, |x| < 1$，求导得$\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$，推出$\sum_{n=1}^{\infty} n x^n = \frac{x}{(1-x)^2}$.

再求导得$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1} = \frac{1+x}{(1-x)^3}$，于是$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}$，$|x| < 1$.

令$x = \frac{1}{3}$得$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n} = \frac{3}{2}$. 故所求级数之和为$\frac{3\pi}{2}$.